

---

# Sur des propriétés structurelles des formules de Horn

---

**Bruno Zanuttini**

GREYC, UMR 6072 ; UNICAEN, CNRS, ENSICAEN

bruno.zanuttini@unicaen.fr

## Résumé

Nous étudions les propriétés structurelles des formules de Horn en lien avec leur graphe de dépendance. Nous donnons une caractérisation simple des arcs de ce graphe, en termes d'affectations qui satisfont ou non une formule, et nous en dérivons un algorithme efficace, pour construire le graphe de dépendance de la borne supérieure de Horn d'un ensemble de modèles ; en particulier donc, de la borne supérieure d'un ensemble de modèles caractéristiques. Ce résultat nous permet également de montrer que la pertinence d'une hypothèse, pour un problème d'abduction de Horn, peut être décidée efficacement avec une représentation par ensemble de modèles.

## Abstract

We investigate the structural properties of Horn formulas that concern their dependency graph. We give a simple characterisation of the arcs in this graph in terms of assignments that satisfy or falsify a formula, and we derive an efficient algorithm for building the dependency graph of the Horn Least Upper Bound of a set of models ; thus, in particular, of a set of characteristic models. This result also allows us to show that the relevance of a hypothesis for a Horn abduction problem can be decided efficiently under model-based representation.

## 1 Introduction

Les formules propositionnelles CNF de Horn ont fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature d'intelligence artificielle. Ceci est dû essentiellement à l'existence d'algorithmes polynomiaux pour décider la satisfaisabilité et l'implication de clauses pour de telles formules [15], contrairement au cas des formules propositionnelles en général, et même des formules CNF non restreintes. De tels algorithmes permettent en effet à un agent qui utilise une

base de connaissances de Horn, de raisonner plus efficacement que s'il avait une base non restreinte.

Il y a toutefois plusieurs problèmes qui ne peuvent pas être résolus efficacement avec des théories représentées par des formules CNF de Horn. Des exemples de tels problèmes sont la minimisation [7] et l'abduction [17], et ceci a motivé l'étude de restrictions additionnelles sur les formules de Horn. En particulier, l'acyclicité joue un rôle important dans les solutions algorithmiques, et permet la minimisation efficace d'une théorie [8] et l'énumération, en temps total polynomial, des explications, pour plusieurs types de problèmes d'abduction, contrairement au cas des formules de Horn non restreintes [6].

L'acyclicité d'une formule de Horn est définie sur son *graphe de dépendance*, c'est-à-dire le graphe orienté dont les sommets sont les variables de la formule, et qui contient un arc de  $x_i$  à  $x_j$  si et seulement si il y a une clause contenant  $\neg x_i$  et  $x_j$  dans la formule. Les résultats de Boros *et al.* [2] montrent que la clôture transitive de ce graphe est invariante par équivalence logique (lorsque l'on considère des formules *premières*). Ceci nous permet d'étudier ce graphe en termes d'ensembles de modèles plutôt que de formules.

Les caractérisations de propriétés de formules CNF en termes de leurs modèles se sont souvent avérées très utiles. Par exemple, il est bien connu que l'ensemble des modèles d'une formule CNF de Horn est clos par le *Et* logique bit-à-bit [14], et ceci a permis la conception de nombreux algorithmes efficaces (voir par exemple le cas de l'identification [4]). Nous donnons ici une caractérisation des arcs du graphe de dépendance d'une formule CNF de Horn. Il s'avère que cette caractérisation est valide même pour un sous-ensemble d'un ensemble de modèles  $M$ , pourvu que sa clôture par le *Et* logique bit-à-bit soit exactement  $M$ . Notre caractérisation est donc valide en particulier pour l'ensemble des *modèles caractéristiques* d'une formule [11].

Nos principales contributions sont les suivantes. En utilisant notre caractérisation, nous proposons un algorithme efficace pour construire le graphe de dépendance de la borne supérieure de Horn (*Horn-LUB* [16]) d'un ensemble donné de modèles (précisément, pour construire la *clôture transitive* de ce graphe). Cet algorithme fonctionne en temps cubique, et nous en donnons une version plus efficace pour le cas des formules CNF de Horn *définies positives*. Nous pensons que cette caractérisation est intéressante en soi, mais nous en donnons également deux applications. La première, très directe, est un algorithme efficace pour décider si un ensemble de modèles caractéristiques est celui d'une formule CNF de Horn acyclique. La seconde est un algorithme efficace pour décider si une hypothèse donnée est pertinente (pour l'inclusion) pour un problème d'abduction de Horn dont la théorie est représentée par un ensemble de modèles caractéristiques. Ce dernier résultat contraste avec la représentation par une formule, cas pour lequel le problème est NP-complet.

## 2 Formules CNF de Horn et graphes de dépendance

Dans tout l'article, nous supposons fixé un ensemble fini de variables propositionnelles  $x_1, \dots, x_n$ . Un *littéral*  $\ell$  est soit une variable  $x_i$  (littéral *positif*), soit la négation  $\neg x_i$  d'une variable (littéral *néгатif*). Une *clause* est un ensemble de littéraux  $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ , vu comme leur disjonction ; nous supposons sans perte de généralité que dans une clause, deux littéraux distincts sont construits sur des variables différentes. Une *formule en forme normale conjonctive* (CNF) est un ensemble fini de clauses, vu comme leur conjonction. La *taille* d'une CNF est définie comme le nombre total d'occurrences de variables, c'est-à-dire comme la somme des cardinalités de ses clauses.

Une *affectation* est une fonction de  $\{x_1, \dots, x_n\}$  dans  $\{0, 1\}$ . Nous écrivons  $m[i]$  pour la valeur affectée par  $m$  à  $x_i$ , et si  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  vérifie  $\forall i \in I, m[i] = c$  ( $c \in \{0, 1\}$ ), nous notons  $m[I] = c$ . Nous noterons parfois une affectation  $m$  par le mot  $m[1]m[2] \dots m[n]$ . Enfin, si  $m_1, \dots, m_k$  sont des affectations,  $ones(m_1, \dots, m_k)$  désigne l'ensemble de tous les indices  $i$  vérifiant  $m_1[i] = \dots = m_k[i] = 1$ .

Nous disons qu'une affectation  $m$  *satisfait* un littéral  $\ell$  si l'on a  $\ell = x_i$  et  $m[i] = 1$ , ou  $\ell = \neg x_i$  et  $m[i] = 0$ . Nous disons que c'est un *modèle* d'une CNF  $\varphi$  si elle satisfait au moins un littéral dans chaque clause de  $\varphi$ . L'ensemble de tous les modèles de  $\varphi$  est noté  $Mods(\varphi)$ . La *taille* d'un ensemble d'affectations est le nombre  $n$  de variables, multiplié par le nombre d'affectations dans l'ensemble. On dit qu'une CNF  $\varphi$  *implique* une CNF  $\varphi'$  (ou une clause, vue comme une CNF) si l'on a  $Mods(\varphi) \subseteq Mods(\varphi')$  (où les modèles sont pris sur l'ensemble de toutes les variables apparaissant dans  $\varphi$  ou dans  $\varphi'$ ) ; de la même manière,  $\varphi$  et  $\varphi'$

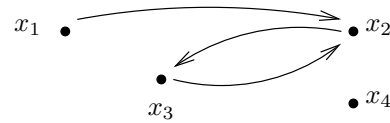


FIGURE 1 – Le graphe de dépendance  $G_{ex}$  de  $\varphi_{ex}$

sont dites *logiquement équivalentes*, ce qu'on note  $\varphi \equiv \varphi'$ , si l'on a  $Mods(\varphi) = Mods(\varphi')$ .

Un *impliqué* d'une CNF  $\varphi$  (respectivement, d'un ensemble d'affectations  $M$ ) est une clause  $C$  qui est impliquée par  $\varphi$  (respectivement, qui est satisfaite par chaque affectation  $m \in M$ ). Un impliqué  $C$  de  $\varphi$  (respectivement, de  $M$ ) est dit *premier* si aucune de ses sous-clauses propres  $C' \subset C$  n'est un impliqué de  $\varphi$  (respectivement, de  $M$ ). La conjonction de tous les impliqués premiers de  $\varphi$  (respectivement, de  $M$ ) est notée  $PI(\varphi)$  (respectivement,  $PI(M)$ ) ; par définition,  $PI(\varphi)$  et  $PI(M)$  sont des CNF, et l'on a  $\varphi \equiv PI(\varphi)$  et  $M = Mods(PI(M))$ . Une CNF est dite *première* si toutes ses clauses sont des impliqués premiers d'elle-même ; en particulier, les CNF  $PI(\varphi)$  et  $PI(M)$  sont toujours premières.

Une clause est dite *de Horn* si elle contient au plus un littéral positif, et *de Horn définie positive* si elle contient exactement un littéral positif. Une CNF est dite *de Horn (définie positive)* si toutes ses clauses sont de Horn (définies positives). Le *graphe de dépendance*  $G(\varphi)$  d'une CNF de Horn  $\varphi$  est défini comme le graphe orienté  $(V, A)$  avec  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , et  $(x_i, x_j) \in A$  si et seulement s'il y a une clause contenant  $\neg x_i$  et  $x_j$  dans  $\varphi$ . La CNF  $\varphi$  est alors dite *de Horn acyclique* si et seulement si le graphe  $G(\varphi)$  est acyclique. Il est important de noter que  $G(\varphi)$  peut être construit en temps linéaire en la taille de  $\varphi$ , et que l'on peut décider s'il est acyclique en temps linéaire.

**Exemple 1** Soit la CNF

$$\varphi_{ex} = \{\{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{\neg x_1, \neg x_3, x_2\}, \{\neg x_1, \neg x_4\}\}$$

On voit facilement que  $\varphi_{ex}$  est de Horn ; son graphe de dépendance  $G_{ex}$  est le graphe orienté donné sur la figure 1. Ce graphe contient le circuit  $(x_2, x_3, x_2)$ , et donc  $\varphi_{ex}$  n'est pas une CNF de Horn acyclique.

## 3 Clôture transitive des graphes de dépendance

Le graphe de dépendance d'une CNF de Horn, tel que défini au paragraphe 2, dépend de la *syntaxe* de la formule. En d'autres termes, il est possible que deux CNF de Horn  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient logiquement équivalentes mais n'aient pas le même graphe de dépendance. Il est même possible que le graphe de l'une soit acyclique alors que l'autre ne l'est pas, comme illustré par l'exemple suivant.

**Exemple 2 (suite de l'exemple 1)** La CNF  $\varphi_{ex}$  est logiquement équivalente à la CNF

$$\varphi'_{ex} = \{\{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{\neg x_1, \neg x_4\}\}$$

En effet,  $\varphi'_{ex}$  peut être obtenue de  $\varphi_{ex}$  en supprimant sa troisième clause, ce qui préserve l'équivalence logique puisqu'elle est subsumée par la première. Le graphe  $G(\varphi'_{ex})$  n'a pas de circuit, donc  $\varphi'_{ex}$  est acyclique bien que  $\varphi_{ex}$  le ne soit pas et que l'on ait  $\varphi_{ex} \equiv \varphi'_{ex}$ .

Malgré cette propriété, en apparence négative, Boros *et al.* [2] montrent que l'acyclicité d'une CNF de Horn peut être définie d'une manière *structurelle*, c'est-à-dire de façon à ce qu'elle soit invariante par équivalence logique. Plus précisément, nous utiliserons la proposition suivante [2, théorème 4.3].

**Proposition 3** Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux CNF de Horn premières logiquement équivalentes. Les clôtures transitives de  $G(\varphi_1)$  et de  $G(\varphi_2)$  sont égales.

## 4 Ensembles de modèles

Nous donnons maintenant notre caractérisation des arcs du graphe de dépendance d'une CNF de Horn en fonction de son ensemble de modèles. En utilisant la proposition 3, nous pouvons en effet parler du graphe de dépendance d'un ensemble d'affectations, indépendamment des formules. Plus précisément, étant donné l'ensemble  $M$  de modèles d'une CNF de Horn, considérons son ensemble d'impliqués premiers  $PI(M)$ . La proposition 3 montre que  $G(PI(M))$  est la clôture transitive de  $G(\varphi)$  pour toute CNF première  $\varphi$  vérifiant  $Mods(\varphi) = M$ ; en particulier, il y a au moins une CNF de Horn acyclique  $\varphi$  vérifiant  $Mods(\varphi) = M$  si et seulement si  $G(PI(M))$  est acyclique.

**Exemple 4 (suite de l'exemple 2)** L'ensemble d'affectations

$$M_{ex} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0110, 0111, 1110\}$$

vérifie  $M_{ex} = Mods(\varphi_{ex})$ . On peut voir que  $PI(M_{ex})$  est l'ensemble de clauses  $\{\{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_1, x_3\}, \{\neg x_1, \neg x_4\}, \{\neg x_2, x_3\}\}$ , et nous concluons donc que le graphe  $G(PI(M_{ex}))$  est acyclique.

Nous donnons maintenant nos deux résultats principaux. Le second précise le premier dans le but d'obtenir des algorithmes efficaces.

**Proposition 5** Soit  $M$  l'ensemble de modèles d'une CNF de Horn. L'arc  $(x_i, x_j)$  est dans  $G(PI(M))$  si et seulement s'il existe un ensemble d'indices  $I$  avec  $i, j \notin I$ , et tel que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1.  $\exists m_{11}^I \in M, m_{11}^I[i] = m_{11}^I[j] = 1$  et  $m_{11}^I[I] = 1$
2.  $\exists m_{00}^I \in M, m_{00}^I[i] = m_{00}^I[j] = 0$  et  $m_{00}^I[I] = 1$
3. il n'y a pas d'affectation  $m_{10}^I \in M$  vérifiant  $m_{10}^I[i] = 1, m_{10}^I[j] = 0$  et  $m_{10}^I[I] = 1$ .

**Preuve** Par définition,  $(x_i, x_j)$  est un arc dans  $G(PI(M))$  si et seulement s'il y a une clause  $C = \{\neg x_i, x_j, \dots\}$  dans  $PI(M)$ .

Supposons tout d'abord qu'il y a une telle clause, et soit  $I$  l'ensemble des indices de tous les littéraux négatifs de  $C$ , excepté  $x_i$ . Alors la condition 3 est vérifiée, car une telle affectation  $m_{10}^I$  ne satisferait pas  $C$ . Ensuite, si la condition 1 n'était pas vérifiée, alors la clause  $C \setminus \{x_j\}$  serait un impliqué de  $\varphi$ , donc  $C$  ne serait pas première, en contradiction avec la définition de  $PI(M)$ . La condition 2 se montre avec le même raisonnement appliqué à  $C \setminus \{\neg x_i\}$ .

Réciproquement, si la condition 3 est vérifiée, alors par définition d'un impliqué, il y a un impliqué de  $\varphi$  de la forme  $\{\neg x_i, x_j, \dots\}$ , pour lequel les indices de tous les littéraux négatifs, excepté  $\neg x_i$ , sont dans  $I$ . Par les conditions 1 et 2, ni  $x_i$  ni  $x_j$  ne peuvent être supprimés de cet impliqué, donc il existe un impliqué premier de  $\varphi$  de la forme désirée.  $\square$

**Proposition 6** Soit  $M$  l'ensemble de modèles d'une CNF de Horn. L'arc  $(x_i, x_j)$  est dans  $G(PI(M))$  si et seulement s'il existe deux affectations  $m_{11}, m_{00} \in M$  telles que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1.  $m_{11}[i] = m_{11}[j] = 1$
2.  $m_{00}[i] = m_{00}[j] = 0$
3. il n'y a pas d'affectation  $m_{10} \in M$  vérifiant  $m_{10}[i] = 1, m_{10}[j] = 0$  et  $m_{10}[ones(m_{11}, m_{00})] = 1$ .

**Preuve** Supposons tout d'abord que  $(x_i, x_j)$  est un arc dans  $G(PI(M))$ . Soient  $I, m_{11}^I, m_{00}^I$  comme dans la proposition 5, et soient  $m_{11} = m_{11}^I$  et  $m_{00} = m_{00}^I$ . Alors les conditions 1 et 2 de la proposition 5 impliquent les conditions 1 et 2 de la présente proposition. Elles impliquent également  $I \subseteq ones(m_{11}, m_{00})$ , et nous pouvons conclure en utilisant la condition 3 de la proposition 5.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $m_{11}, m_{00}$  vérifiant les trois conditions. On voit alors facilement que  $I = ones(m_{11}, m_{00})$ ,  $m_{11}^I = m_{11}$  et  $m_{00}^I = m_{00}$  vérifient les conditions de la proposition 5, ce qui permet de conclure directement.  $\square$

**Exemple 7 (suite de l'exemple 4)** Les deux affectations  $m_{11} = 1110$  et  $m_{00} = 0000$  de  $M_{ex}$  attestent la présence de l'arc  $(x_1, x_2)$  dans  $G(PI(M_{ex}))$ , puisqu'il n'y a pas d'affectation  $m_{10}$  dans  $M_{ex}$  vérifiant  $m_{10}[1] = 1$  et  $m_{10}[2] = 0$ . Par ailleurs, puisqu'il n'y a pas d'affectation  $m$  dans  $M_{ex}$  satisfaisant  $m[1] = m[4] = 1$ , nous pouvons conclure que ni  $(x_1, x_4)$  ni  $(x_4, x_1)$  ne sont des arcs dans  $G(PI(M_{ex}))$ .

## 5 Bornes supérieures de Horn

Les résultats donnés au paragraphe 4 ne sont pas très surprenants, puisque l'ensemble complet des modèles d'une CNF contient énormément d'information explicite. Nous montrons maintenant que, de façon bien plus intéressante, ces résultats se généralisent au cas où l'ensemble de modèles d'une CNF n'est pas donné explicitement, mais par un de ses sous-ensembles. Nous rappelons tout d'abord les notions utilisées.

Lorsqu'une CNF  $\varphi$  est de Horn, il est bien connu que l'ensemble d'affectations  $Mods(\varphi)$  est clos par *Et* logique bit-à-bit [14, 4]; ceci signifie que pour toute paire de modèles  $\{m, m'\}$  de  $\varphi$ , l'affectation  $m \wedge m'$  définie par  $ones(m \wedge m') = ones(m, m')$  est également dans  $Mods(\varphi)$ . C'est par ailleurs une caractérisation, en ce sens que si un ensemble d'affectations a cette propriété, alors c'est nécessairement l'ensemble des modèles d'au moins une CNF de Horn. Nous disons donc d'un ensemble d'affectations clos par *Et* logique bit-à-bit qu'il est *de Horn*.

Il s'ensuit qu'étant donné un ensemble d'affectations  $M$ , il existe un unique ensemble d'affectations qui est de Horn, qui inclut  $M$  et qui est minimal pour l'inclusion [4]. Cet ensemble peut être obtenu en calculant itérativement la clôture de  $M$  par *Et*, et nous l'appelons sa *borne supérieure (de Horn)* (Horn-LUB). Nous notons  $\overline{M}$  la Horn-LUB de  $M$ <sup>1</sup>.

Si  $M$  est de Horn, il existe de plus un unique ensemble d'affectations qui est inclus dans  $M$ , qui a  $M$  comme Horn-LUB, et qui est minimal pour l'inclusion. Cet ensemble est appelé l'ensemble des *modèles caractéristiques (de Horn)*, ou des *modèles extrémaux*, de  $M$  [16, 11], et nous le notons  $Char(M)$ .

**Exemple 8 (suite de l'exemple 7)** *L'ensemble d'affectations  $Char_{ex} = \{0001, 0011, 0111, 1110\}$  est l'ensemble des modèles caractéristiques de l'ensemble  $M_{ex}$ . Il vérifie donc en particulier  $\overline{Char_{ex}} = M_{ex}$ . L'ensemble  $\{0001, 0010, 0011, 0111, 1110\}$  a également  $M_{ex}$  comme Horn-LUB, mais ce n'est pas un ensemble de modèles caractéristiques, puisqu'il n'est pas minimal pour l'inclusion (une autre façon de le voir est que l'affectation 0010 peut être obtenue comme le *Et* de deux autres affectations de l'ensemble, en l'occurrence 0011 et 1110).*

De nombreux travaux se sont intéressés aux modèles caractéristiques [10, 16, 11, 6]. Cet intérêt provient du fait que la représentation d'une théorie de Horn par son ensemble de modèles caractéristiques peut économiser un espace exponentiel (même si cela n'est pas garanti et que l'inverse peut également se produire), tout en rendant plus facile bon nombre d'opérations.

1. Notons que l'expression « borne supérieure de Horn de  $M$  » désigne en général une CNF ayant pour ensemble de modèles la clôture de  $M$ . Toutefois, notre notation  $\overline{M}$  empêche toute confusion.

Nous montrons maintenant qu'étant donné un ensemble d'affectations  $M$ , toute l'information sur le graphe de dépendance de  $PI(\overline{M})$  peut être retrouvée efficacement. En particulier, il s'avère qu'un ensemble de modèles caractéristiques est suffisant pour retrouver cette information. Soulignons que ceci n'était *a priori* pas garanti, car certains problèmes cessent d'être traitables efficacement lorsque l'on passe d'un ensemble complet d'affectations à l'ensemble correspondant de modèles caractéristiques; un exemple est le problème consistant à décider si une CNF de Horn a pour ensemble de modèles la Horn-LUB d'un ensemble donné d'affectations [12].

**Proposition 9 (parallèle à la proposition 6)** *Soit  $M$  un ensemble quelconque d'affectations. L'arc  $(x_i, x_j)$  est dans  $G(PI(\overline{M}))$  si et seulement s'il existe des affectations  $\mu_{11}, \mu_{00} \in M$  telles que les trois conditions suivantes soient vérifiées :*

1.  $\mu_{11}[i] = \mu_{11}[j] = 1$
2.  $\mu_{00}[i] = \mu_{00}[j] = 0$
3. *il n'y a pas d'affectation  $\mu_{10} \in M$  vérifiant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[ones(\mu_{11}, \mu_{00})] = 1$ .*

**Preuve** Supposons tout d'abord que  $(x_i, x_j)$  est un arc dans  $G(PI(\overline{M}))$ , et soient  $m_{11}, m_{00} \in \overline{M}$  comme dans la proposition 6. Par définition de  $\overline{M}$ , il existe un sous-ensemble  $M_{11}$  de  $M$ , non vide, vérifiant  $m_{11} = \bigwedge M_{11}$ ; puisque l'on a  $m_{11}[i] = m_{11}[j] = 1$ , on a  $\forall m \in M_{11}, m[i] = m[j] = 1$ , et nous définissons  $\mu_{11}$  comme l'une quelconque de ces affectations  $m$ . De façon similaire, il y a un sous-ensemble  $M_{00}$  de  $M$ , non vide, vérifiant  $m_{00} = \bigwedge M_{00}$ . Puisque l'on a  $m_{00}[i] = m_{00}[j] = 0$ , on a soit (i)  $\exists m \in M_{00}, m[i] = m[j] = 0$ , soit (ii)  $\exists m, m' \in M_{00}, m[i] = m'[j] = 0$  and  $m[j] = m'[i] = 1$ . Mais puisque par construction on a  $\forall m \in M_{00}, ones(m) \supseteq ones(m_{00}) \supseteq ones(m_{11}, m_{00})$ , la possibilité (ii) contredirait la condition 3 de la proposition 6; donc on a  $\exists m \in M_{00}, m[i] = m[j] = 0$ , et nous définissons  $\mu_{00}$  comme une telle affectation  $m$ . Par construction,  $\mu_{11}$  et  $\mu_{00}$  satisfont les conditions 1 et 2. Enfin, puisque par construction on a  $ones(m_{11}) \subseteq ones(\mu_{11})$  et  $ones(m_{00}) \subseteq ones(\mu_{00})$ , et puisque (par la condition 3 de la proposition 6) il n'y a pas d'affectation  $m_{10} \in \overline{M}$  vérifiant  $m_{10}[i] = 1, m_{10}[j] = 0$  et  $m_{10}[ones(\mu_{11}, \mu_{10})] = 1$ , il n'y a *a fortiori* pas de telle affectation  $m_{10}$  dans  $M$ , et la condition 3 est donc vérifiée.

Supposons maintenant qu'il existe des affectations  $\mu_{11}, \mu_{00} \in M$  vérifiant les trois conditions de la proposition, et soient  $m_{11} = \mu_{11}$  et  $m_{00} = \mu_{00}$ . Puisque l'on a  $M \subseteq \overline{M}$ , on a  $m_{11}, m_{00} \in \overline{M}$ ; nous montrons que ces affectations vérifient également les conditions de la proposition 6. Les conditions 1 et 2 en sont évidemment satisfaites. Nous considérons donc la condition 3. Supposons par l'absurde qu'il existe une affectation  $m_{10} \in \overline{M}$  vérifiant  $m_{10}[i] = 1, m_{10}[j] = 0$  et  $m_{10}[ones(m_{11}, m_{00})] = 1$ .

1. Alors, comme ci-dessus il existe un ensemble d'affectations  $M_{10} \subseteq M$  vérifiant  $m_{10} = \bigwedge M_{10}$  et  $\exists \mu_{10} \in M_{10}, \mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(m_{11}, m_{00})] = 1$ ; puisque l'on a  $m_{11} = \mu_{11}$  et  $m_{00} = \mu_{00}$ , ceci contredit la condition 3.  $\square$

**Exemple 10 (suite de l'exemple 8)** *Les deux affectations  $\mu_{11} = 1110$  et  $\mu_{00} = 0001$  de  $\text{Char}_{ex}$  attestent la présence de l'arc  $(x_1, x_2)$  dans  $G(\varphi_{ex})$ . Observons que l'affectation  $0000$  mise en évidence dans l'exemple 7 n'est pas un modèle caractéristique, mais qu'elle peut être obtenue des affectations de  $\text{Char}_{ex}$  par  $0000 = \bigwedge \{0001, 1110\}$ .*

**Proposition 11** *Soit  $M$  un ensemble quelconque d'affectations. Le graphe  $G(\text{PI}(\overline{M}))$  peut être construit en temps cubique en la taille de  $M$ .*

**Preuve** L'algorithme s'inspire directement de la caractérisation de la proposition 9. Pour chaque couple  $(x_i, x_j)$  de variables, l'algorithme décide si l'arc  $(x_i, x_j)$  est dans  $G(\text{PI}(\overline{M}))$ . Pour ce faire, il considère tous les couples  $(\mu_{11}, \mu_{00})$ , et pour chacun il décide s'il y a dans  $M$  une affectation  $\mu_{10}$  falsifiant la condition 3 de la proposition 9.

Notons  $m$  le nombre d'affectations dans  $M$ , et rappelons que  $n$  désigne le nombre de variables. Il y a  $O(n^2)$  couples de variables, et pour chaque couple il y a  $O(m^2)$  couples  $(\mu_{11}, \mu_{00})$  à considérer. Étant donnés  $(x_i, x_j)$  et  $(\mu_{11}, \mu_{00})$ , la présence d'une affectation  $\mu_{10}$  telle que dans la proposition 9 peut être décidée en parcourant  $M$  une fois, en temps  $O(mn)$ . La complexité de l'algorithme est donc en  $O(n^2 m^2 mn) = O(m^3 n^3)$ , c'est-à-dire cubique en la taille de  $M$ .  $\square$

## 6 Bornes supérieures de Horn définies positives

Rappelons qu'une CNF est dite *de Horn définie positive* si chacune de ses clauses contient exactement un littéral positif. On voit facilement que l'ensemble des modèles d'une CNF de Horn est celui d'une CNF de Horn *définie positive* si et seulement s'il contient l'affectation qui associe 1 à toutes les variables. Nous notons cette affectation  $\vec{1}$ . Le lemme suivant est évident, puisque l'affectation  $\vec{1}$  ne peut pas être obtenue par le *Et* bit-à-bit d'autres affectations.

**Lemme 12** *Soit  $M$  un ensemble quelconque d'affectations. L'ensemble  $\overline{M}$  contient l'affectation  $\vec{1}$  si et seulement si  $M$  la contient également.*

Nous montrons maintenant que dans le cas défini positif, le graphe de dépendance de  $\text{PI}(\overline{M})$  peut être obtenu plus efficacement que dans le cas général.

**Proposition 13** *Soit  $M$  un ensemble d'affectations contenant  $\vec{1}$ . Le graphe  $G(\text{PI}(\overline{M}))$  peut être construit en temps  $O(m^2 n^3)$ , où  $m$  est le nombre d'affectations dans  $M$ .*

**Preuve** Pour montrer le résultat, nous montrons qu'étant donné un couple de variables  $(x_i, x_j)$ , il y a un arc de  $x_i$  à  $x_j$  dans  $G(\text{PI}(\overline{M}))$  si et seulement s'il existe une affectation  $\mu_{00} \in M$  vérifiant  $\mu_{00}[i] = \mu_{00}[j] = 0$ , et telle qu'il n'y ait pas d'affectation  $\mu_{10} \in M$  vérifiant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(\vec{1}, \mu_{00})] = 1$  (c'est-à-dire  $\mu_{10}[\text{ones}(\mu_{00})] = 1$ ). Nous renforçons donc la caractérisation de la proposition 9 en montrant qu'il suffit de considérer  $\mu_{11} = \vec{1}$ .

Tout d'abord, s'il existe une affectation  $\mu_{00}$  comme ci-dessus, alors puisque  $\mu_{11} = \vec{1}$  est dans  $M$ , la proposition 9 permet de conclure que l'arc  $(x_i, x_j)$  est dans  $G(\text{PI}(\overline{M}))$ . Réciproquement, si cet arc est dans  $G(\text{PI}(\overline{M}))$ , alors il existe des affectations  $\mu_{11}$  et  $\mu_{00}$  comme dans la proposition 9. En particulier, il n'y a pas d'affectation  $\mu_{10} \in M$  vérifiant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(\mu_{11}, \mu_{00})] = 1$ . Mais on voit facilement que l'on a  $\text{ones}(\mu_{11}, \mu_{00}) \subseteq \text{ones}(\mu_{00})$ , donc il n'y a *a fortiori* pas d'affectation  $\mu_{10}$  vérifiant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(\mu_{00})] = 1$ . Ceci suffit à conclure.

La complexité est établie comme suit. Soit de nouveau  $m$  le nombre d'affectations dans  $M$ . Pour chacun des  $O(n^2)$  couples de variables  $(x_i, x_j)$ , il y a  $m$  affectations candidates  $\mu_{00}$ , et pour chacune il suffit de décider la présence d'une affectation  $\mu_{10}$  comme ci-dessus, en temps  $O(mn)$  en parcourant  $M$ .  $\square$

## 7 Bornes supérieures de Horn acycliques

En utilisant les résultats donnés aux paragraphes précédents, nous sommes maintenant en mesure de donner une caractérisation des ensembles d'affectations  $M$  tels que  $\overline{M}$  est l'ensemble de modèles d'une CNF de Horn acyclique. Les résultats qui suivent sont des corollaires directs des résultats précédents. Rappelons seulement que l'ensemble d'affectations  $\overline{M}$  est l'ensemble de modèles d'une CNF de Horn acyclique si et seulement si le graphe  $G(\text{PI}(\overline{M}))$  est acyclique. Par ailleurs, ce graphe a un circuit (c'est-à-dire, n'est pas acyclique) si et seulement s'il a un circuit de taille 2 (de la forme  $(x_i, x_j, x_i)$ ), puisqu'il est transitivement clos. Ce dernier point implique qu'il n'est pas nécessaire de construire le graphe  $G(\text{PI}(\overline{M}))$  entièrement pour décider s'il est acyclique, et qu'il suffit de vérifier tous les couples de variables.

**Proposition 14** *Soit  $M$  un ensemble quelconque d'affectations. Il n'existe pas de CNF de Horn acyclique  $\varphi$  vérifiant  $\overline{M} = \text{Mods}(\varphi)$  si et seulement s'il existe deux indices  $i, j$  et quatre affectations  $\mu_{11}, \mu_{00}, \mu'_{11}, \mu'_{00} \in M$  vérifiant les quatre conditions suivantes :*

1.  $\mu_{11}[i] = \mu_{11}[j] = 1$  et  $\mu_{00}[i] = \mu_{00}[j] = 0$
2. il n'existe pas d'affectation  $\mu_{10} \in M$  satisfaisant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(\mu_{11}, \mu_{00})] = 1$

3.  $\mu'_{11}[i] = \mu'_{11}[j] = 1$  et  $\mu'_{00}[i] = \mu'_{00}[j] = 0$
4. il n'existe pas d'affectation  $\mu'_{01} \in M$  satisfaisant  $\mu'_{01}[i] = 0, \mu'_{01}[j] = 1$  et  $\mu'_{01}[\text{ones}(\mu'_{11}, \mu'_{00})] = 1$ .

**Proposition 15** Soit  $M$  un ensemble d'affectations contenant  $\vec{1}$ . Il n'existe pas de CNF de Horn acyclique  $\varphi$  vérifiant  $\overline{M} = \text{Mods}(\varphi)$  si et seulement si il existe deux indices  $i, j$  et deux affectations  $\mu_{00}, \mu'_{00} \in M$  vérifiant les quatre conditions suivantes :

1.  $\mu_{00}[i] = \mu_{00}[j] = 0$
2. il n'existe pas d'affectation  $\mu_{10} \in M$  satisfaisant  $\mu_{10}[i] = 1, \mu_{10}[j] = 0$  et  $\mu_{10}[\text{ones}(\mu_{00})] = 1$
3.  $\mu'_{00}[i] = \mu'_{00}[j] = 0$
4. il n'existe pas d'affectation  $\mu'_{01} \in M$  satisfaisant  $\mu'_{01}[i] = 0, \mu'_{01}[j] = 1$  et  $\mu'_{01}[\text{ones}(\mu'_{00})] = 1$ .

**Proposition 16** On peut décider, pour un ensemble d'affectations  $M$  donné (respectivement, contenant  $\vec{1}$ ), si  $\overline{M}$  est l'ensemble de modèles d'une CNF de Horn acyclique en temps  $O(m^3n^3)$  (respectivement,  $O(m^2n^3)$ ), où  $m$  est le nombre d'affectations dans  $M$ . Ceci est vrai en particulier si  $M$  est un ensemble de modèles caractéristiques.

## 8 Pertinence pour l'abduction

Nous terminons en donnant une application de nos résultats à un problème lié à l'abduction. L'abduction est le processus consistant à expliquer une observation en fonction d'une théorie et d'un ensemble d'hypothèses. Il est bien connu que ce processus a de nombreuses applications, par exemple au diagnostic médical [3], à l'interprétation de textes en langue naturelle [9], ou à la configuration interactive de produits [1].

Nous adopterons la formalisation suivante du processus d'abduction.

**Définition 17** Une instance du problème d'abduction est un triplet  $(\Sigma, H, q)$ , où  $\Sigma$  est une théorie,  $H$  est un sous-ensemble de ses variables et  $q$  (la manifestation) est l'une de ses variables. Une explication pour  $(\Sigma, H, q)$  est un sous-ensemble  $E$  de  $H$  tel que la formule  $\Sigma \wedge \bigwedge E$  soit cohérente et implique  $q$ . Une explication  $E$  est dite minimale si il n'existe pas d'explication  $E' \subset E$  pour  $(\Sigma, H, q)$ .

Le problème consistant à décider s'il existe une explication pour une instance donnée du problème d'abduction est bien connu comme très difficile pour une représentation de la théorie  $\Sigma$  par une formule. Plus précisément, il est  $\Sigma_2^P$ -complet si la théorie  $\Sigma$  est donnée en CNF, et NP-complet si elle est donnée par une CNF de Horn [5]. *A contrario*, ce problème peut être résolu en temps polynomial si la théorie est de Horn, et représentée par son ensemble de modèles caractéristiques [11].

Il s'avère que le problème de pertinence [3, 5] a la même complexité que le problème d'existence d'une explication, pour une représentation par des formules. Une hypothèse  $h \in H$  est dite pertinente pour une instance  $(\Sigma, H, q)$  du problème d'abduction s'il existe au moins une explication minimale qui contient  $h$  [5].

**Proposition 18** Le problème consistant à décider si une hypothèse  $h \in H$  donnée est pertinente pour une instance  $(\Sigma, H, q)$  du problème d'abduction, où  $\Sigma$  est une CNF de Horn, est NP-complet. Il reste NP-complet même si  $\Sigma$  est restreinte à la classe des CNF de Horn définies positives.

**Preuve** Eiter et Gottlob montrent ce résultat pour le cas où les manifestations sont des conjonctions de variables [5, théorèmes 5.5 et 5.7]. Dans notre cadre où la manifestation est seulement une variable, l'appartenance à NP découle de leur résultat. Pour la difficulté, il suffit d'observer que le problème consistant à expliquer  $q_1 \wedge \dots \wedge q_m$  pour une théorie  $\Sigma$ , se réduit au problème consistant à expliquer  $q$  pour la théorie  $\Sigma \wedge (\neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_m \vee q)$ , où  $q$  est une variable n'apparaissant pas dans  $\Sigma$ .  $\square$

Ce que nous montrons maintenant est que, *a contrario*, la pertinence d'une hypothèse donnée peut être décidée en temps polynomial si  $\Sigma$  est de Horn, et représentée par l'ensemble de ses modèles caractéristiques. Nous utiliserons le lemme, classique, suivant [13].

**Lemme 19** Soit  $(\Sigma, H, q)$  une instance du problème d'abduction, et soit  $E \subseteq H$ . Alors  $E$  est une explication minimale pour  $(\Sigma, H, q)$  si et seulement si la clause  $q \vee \bigvee_{x \in E} \neg x$  est un impliqué premier de  $\Sigma$ .

Ainsi,  $h$  est pertinente pour  $(\Sigma, H, q)$  si et seulement si il existe un impliqué premier de  $\Sigma$  dont toutes les variables sont dans l'ensemble  $H \cup \{q\}$ , et qui contient  $\neg h$  et  $q$ . Pour traiter la condition que chaque variable soit dans  $H \cup \{q\}$ , nous définissons la projection  $M|_V$  d'un ensemble  $M$  d'affectations aux variables  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , sur un ensemble de variables  $V \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ , comme l'ensemble d'affectations à  $V$  qui concordent avec au moins une affectation de l'ensemble  $M$  [18].

**Exemple 20 (suite de l'exemple 4)** Soit  $V$  l'ensemble  $\{x_2, x_3\}$ . La projection de  $M_{ex}$  sur  $V$  est l'ensemble d'affectations  $\{00, 01, 11\}$ .

On voit aisément que les impliqués de  $M$  qui ne contiennent que des variables de l'ensemble  $V$  sont exactement les impliqués de la projection de  $M$  sur  $V$ . On voit tout aussi aisément, en utilisant la clôture par *Et* bit-à-bit, que si  $M$  est la Horn-LUB de  $\Sigma$  et que  $V$  est un ensemble de variables, alors  $M|_V$  est la Horn-LUB de  $\Sigma|_V$ . Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Proposition 21** On peut décider si une hypothèse  $h \in H$  est pertinente pour une instance  $(\Sigma, H, q)$  du problème d'abduction en temps  $O(m^3n)$  (respectivement,  $O(m^2n)$ ), si  $\Sigma$  est donnée par l'ensemble  $M$  de ses modèles caractéristiques (respectivement, et contient  $\bar{1}$ ), où  $m$  est le nombre d'affectations dans  $M$ .

**Preuve** L'algorithme découle directement des observations ci-dessus. Étant donné  $(M, H, q)$ , il projette tout d'abord l'ensemble de modèles caractéristiques  $M$  de  $\Sigma$  sur  $H \cup \{q\}$ , puis il décide s'il existe un impliqué premier de sa Horn-LUB  $\overline{M_{|H \cup \{q\}}}$  qui contient à la fois  $\neg h$  et  $q$ .

La projection de  $M$  peut être calculée en temps linéaire  $O(mn)$ , et il y a au plus  $m$  affectations dans l'ensemble  $M_{|H \cup \{q\}}$  résultant. Par ailleurs, décider s'il existe un impliqué premier de  $\overline{M_{|H \cup \{q\}}}$  qui contient à la fois  $\neg h$  et  $q$  revient à décider si l'arc  $(h, q)$  est dans  $G(PI(\overline{M_{|H \cup \{q\}}}))$ , ce qui peut être fait en temps  $O(m^3n)$  avec la caractérisation de la Proposition 9, et en temps  $O(m^2n)$  comme dans la proposition 13 si  $M$  (et donc  $M_{|H \cup \{q\}}$ ) contient  $\bar{1}$ .  $\square$

## 9 Conclusion

Nous avons donné une caractérisation simple des arcs présents dans la clôture transitive du graphe de dépendance d'une CNF de Horn (première), en termes d'ensembles de modèles. Ce résultat nous a permis de proposer un algorithme polynomial pour construire le graphe de dépendance de l'ensemble de tous les impliqués premiers d'une théorie de Horn  $\Sigma$ , donnée par l'ensemble de ses modèles. De façon plus importante, cet algorithme fonctionne exactement de la même manière si la théorie  $\Sigma$  est donnée par un sous-ensemble  $M$  de ses modèles, dont la Horn-LUB est  $\Sigma$ .

Nous pensons que ce résultat est intéressant en soi. Nous en avons toutefois donné deux applications. Tout d'abord, l'existence d'une CNF de Horn acyclique, ayant pour ensemble de modèles la Horn-LUB d'un ensemble donné d'affectations, peut être décidée en temps polynomial. Ensuite, nous avons montré que la pertinence d'une hypothèse pour une instance du problème d'abduction peut être décidée en temps polynomial si la théorie est de Horn, et donnée par l'ensemble de ses modèles caractéristiques, contrairement au cas où elle est donnée par une CNF de Horn. Ce problème s'ajoute ainsi à la liste des problèmes qui peuvent être résolus plus efficacement pour une représentation par modèles que pour une représentation par formules.

La principale perspective de ce travail est l'application de notre caractérisation à d'autres problèmes. Par exemple, Eiter and Makino ont montré que pour une représentation par des CNF, plusieurs problèmes relatifs à l'énumération des explications pour le problème d'abduction sont plus facile si la théorie (CNF de Horn) est acyclique [6]. Puisque

les problèmes correspondants sont difficiles pour une représentation par modèles, nous espérons que notre caractérisation permettra de tirer parti de l'hypothèse d'acyclicité dans cette représentation.

## Références

- [1] J. Amilhastre, H. Fargier, and P. Marquis. Consistency restoration and explanations in dynamic CSPs — application to configuration. *Artificial Intelligence*, 135(1–2) :199–234, 2002.
- [2] E. Boros, O. Čepek, and A. Kogan. Horn minimization by iterative decomposition. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 23(3–4) :321–343, 1998.
- [3] T. Bylander, D. Allemang, M.C. Tanner, and J.R. Josephson. Some results concerning the computational complexity of abduction. In *Proc. 1st International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'89)*, pages 44–54. Morgan Kaufmann, 1989.
- [4] R. Dechter and J. Pearl. Structure identification in relational data. *Artificial Intelligence*, 58 :237–270, 1992.
- [5] T. Eiter and G. Gottlob. The complexity of logic-based abduction. *Journal of the ACM*, 42(1) :3–42, 1995.
- [6] T. Eiter and K. Makino. On computing all abductive explanations from a propositional Horn theory. *Journal of the ACM*, 54(5), 2007.
- [7] P.L. Hammer and A. Kogan. Optimal compression of propositional Horn knowledge bases : complexity and approximation. *Artificial Intelligence*, 64 :131–145, 1993.
- [8] P.L. Hammer and A. Kogan. Quasi-acyclic propositional Horn knowledge bases : optimal compression. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 7(5) :751–762, 1995.
- [9] J. Hobbs, M. Stickel, D. Appelt, and P. Martin. Interpretation as abduction. *Artificial Intelligence*, 63 :69–142, 1993.
- [10] D. Kavvadias, C.H. Papadimitriou, and M. Sideri. On Horn envelopes and hypergraph transversals (extended abstract). In *Proc. 4th International Symposium on Algorithms And Computation (ISAAC'93)*, number 762 in Springer Lecture Notes in Computer Science, pages 399–405. Springer, 1993.
- [11] R. Khardon and D. Roth. Reasoning with models. *Artificial Intelligence*, 87 :187–213, 1996.

- [12] R. Khardon. Translating between Horn representations and their characteristic models. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 3 :349–372, 1995.
- [13] P. Marquis. Consequence finding algorithms. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems (DRUMS)*, volume 5, pages 41–145. Kluwer Academic, 2000.
- [14] J. McKinsey. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers. *Journal of Symbolic Logic*, 8 :61–77, 1943.
- [15] M. Minoux. LTUR : a simplified linear-time unit resolution algorithm for Horn formulae and computer implementation. *Information Processing Letters*, 29(1) :1–12, 1988.
- [16] B. Selman and H. Kautz. Knowledge compilation and theory approximation. *Journal of the ACM*, 43(2) :193–224, 1996.
- [17] B. Selman and H.J. Levesque. Abductive and default reasoning : a computational core. In *Proc. 8th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'90)*, pages 343–348. AAAI Press, 1990.
- [18] B. Zanuttini. New polynomial classes for logic-based abduction. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 19 :1–10, 2003.