

Le cube des oppositions - Une structure à la base de nombreux formalismes de représentation des connaissances

Didier Dubois¹ Henri Prade¹ Agnès Rico²

1. IRIT- Institut de Recherche en Informatique de Toulouse,
Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 9
2. ÉRIC- Equipe de Recherche en Ingénierie des Connaissances,
Université Claude Bernard Lyon 1, 69100 Villeurbanne
{dubois, prade}@irit.fr, agnes.rico@univ-lyon1.fr

Résumé

Le carré des oppositions est une structure inventée du temps d'Aristote, qui met en jeu deux négations involutives en reliant des énoncés quantifiés. Redécouvert dans la seconde moitié du $XX^{\text{ème}}$ siècle pour son intérêt dans la modélisation des structures conceptuelles et le traitement de problèmes en logiques paraconsistantes, le carré des oppositions a été récemment complété en un cube, ce qui correspond à l'introduction d'une troisième négation. Un tel cube se rencontre dans des cadres très différents de représentation des connaissances, comme la logique modale, la théorie des possibilités dans sa version tout-ou-rien, l'analyse formelle de concepts, la théorie des ensembles approximatifs, ou l'argumentation abstraite. Après avoir rappelé ces résultats dans une perspective unifiée, l'article propose une extension graduelle du cube et montre comment plusieurs formalismes, qualitatifs aussi bien que quantitatifs, comme l'intégrale de Sugeno utilisée en agrégation multi-critères et en décision qualitative, ou encore les fonctions de croyance et les intégrales de Choquet, obéissent à des transformations qui forment des cubes d'oppositions graduelles. Cette découverte introduit une nouvelle perspective pour de nombreux formalismes de représentation des connaissances, soulignant leurs traits communs. Le cube des oppositions met en évidence de fructueux parallélismes entre différents formalismes, ce qui peut conduire à mettre en lumière des composants présents dans un formalisme et encore manquants ou négligés dans un autre.

Abstract

The square of opposition is a structure involving two involutive negations and relating quantified statements, invented in Aristotle time. Rediscovered in the second

half of the XX^{th} century, and advocated as being of interest for understanding conceptual structures and solving problems in paraconsistent logics, the square of opposition has been recently completed into a cube, which corresponds to the introduction of a third negation. Such a cube can be encountered in very different knowledge representation formalisms, such as modal logic, possibility theory in its all-or-nothing version, formal concept analysis, rough set theory and abstract argumentation. After restating these results in a unified perspective, the paper proposes a graded extension of the cube and shows that several qualitative, as well as quantitative formalisms, such as Sugeno integrals used in multiple criteria aggregation and qualitative decision theory, or yet belief functions and Choquet integrals, are amenable to transformations that form graded cubes of opposition. This discovery leads to a new perspective on many knowledge representation formalisms, laying their underlying common features. The cube of opposition exhibits fruitful parallelisms between different formalisms, which leads to highlight some missing components present in one formalism and currently absent from another.

1 Introduction

On peut considérer que la première tentative de modélisation du raisonnement humain remonte en Occident à l'étude des syllogismes, qui débuta dans l'Antiquité Grecque, et qui fut poursuivie tout au long des siècles, jusqu'à Euler [20] qui en donna une représentation diagrammatique, et à Gergonne [23] [21] qui fut le premier à établir quels syllogismes étaient valides, et lesquels ne l'étaient pas, et ce sur une base

rigoureuse [26]. C'était donc bien avant les débuts de l'intelligence artificielle (IA) qu'on s'est intéressé à la formalisation du raisonnement. En même temps que les syllogismes, Aristote et son école introduisit aussi le carré des oppositions [27], un schéma qui présente différentes formes d'opposition entre des énoncés universellement ou existentiellement quantifiés qui peuvent apparaître comme prémisses dans des syllogismes. Les oppositions dans le carré résultent de l'interaction entre une négation "externe" et une négation "interne", toutes deux involutives. L'intérêt pour ce carré semble disparaître avec les débuts de la logique moderne à la fin du XIX^{ème} siècle. Un regain d'intérêt pour les structures d'opposition voit le jour dans les années 1950's quand un logicien français, Robert Blanché [6] découvre que le carré peut être complété en un hexagone contenant trois carrés d'opposition, hexagone qu'on retrouve dans l'organisation de nombreuses structures conceptuelles, comme par exemple, les comparateurs mathématiques, ou les modalités déontiques [7]. Cet intérêt se confirmera plus tard, quand les structures du carré et de l'hexagone s'avèrent utiles pour résoudre des questions délicates, en particulier en logique modale paraconsistante [4, 5].

Plus récemment, il a été mis en évidence qu'une extension cubique particulière du carré des oppositions, mettant en jeu une troisième négation, se rencontre dans différents formalismes de représentation des connaissances utilisés en IA, à savoir la logique modale, la théorie des possibilités dans sa version tout-ou-rien, l'analyse formelle de concepts, la théorie des ensembles approximatifs ("rough sets") et l'argumentation abstraite [15, 2, 9]. Cet état de fait est d'autant plus remarquable que ces formalismes ont été développés indépendamment les uns des autres, et en général avec des objectifs très différents en représentation des connaissances. Les bénéfices escomptés de la découverte de telles analogies entre des formalismes ayant des motivations différentes, sont de deux ordres. La découverte que cette structure cubique d'opposition est à l'œuvre dans un formalisme peut apporter un autre éclairage sur sa compréhension, et ce qui est plus important peut conduire à mettre en évidence de nouveaux éléments, jusqu'alors négligés dans ce formalisme, alors que leur contrepartie dans un autre formalisme est bien connue et joue un rôle important.

Le carré et par suite le cube des oppositions sont des structures où les sommets sont traditionnellement associés à des énoncés qui sont vrais ou faux, ou qui comportent des modalités binaires. Dans la suite on montre que cela fait sens d'étendre le carré et le cube à des structures graduées. On peut alors envisager d'étudier d'autres formalismes à la lumière du cube des oppositions, tels que la théorie des possibilités (gra-

duelles), les opérations qualitatives d'agrégation multi-critère, et plus généralement les intégrales de Sugeno, ou des notions plus quantitatives comme les fonctions de croyance et l'intégrale de Choquet.

L'article est structuré comme suit. La Section 2 présente un rappel sur le carré, l'hexagone, et le cube des oppositions. En Section 3, on propose une lecture très simple du cube en termes d'indicateurs ensemblistes, qui s'avère très proche de la théorie des possibilités booléennes, et on montre la complémentarité des différentes informations apparaissant sur le cube. En Section 4, une autre lecture essentielle, en termes de composition relationnelle est rappelée, qui explique pourquoi la logique modale, l'analyse formelle de concepts, les "rough sets", et l'argumentation abstraite ont pour soubassement la structure du cube des oppositions. La Section 5 discute comment le cube se généralise naturellement à des structures graduées. Ceci est exemplifié en Section 6 avec l'agrégation multi-critère et les intégrales de Sugeno, et en Section 7 avec les fonctions de croyance et les intégrales de Choquet.

2 Carré et cube

Le carré des oppositions traditionnel [27] est construit à partir d'énoncés universellement et existentiellement quantifiés, de la manière suivante. Considérons l'énoncé (**A**) de la forme "tous les P sont des Q ", dont la négation est l'énoncé (**O**) "au moins un P n'est pas un Q ", ainsi que l'énoncé (**E**) "aucun P n'est un Q ", qui est clairement en une opposition plus forte avec le premier énoncé (**A**). Ces trois énoncés, complétés par la négation du dernier énoncé (**E**), c'est-à-dire (**I**) "au moins un P est un Q ", peuvent être disposés sur un carré dont les sommets sont traditionnellement dénotés par les lettres **A**, **I** (moitié affirmative) et **E**, **O** (moitié négative), comme montré sur la Figure 1 (où \bar{Q} signifie "non Q ").

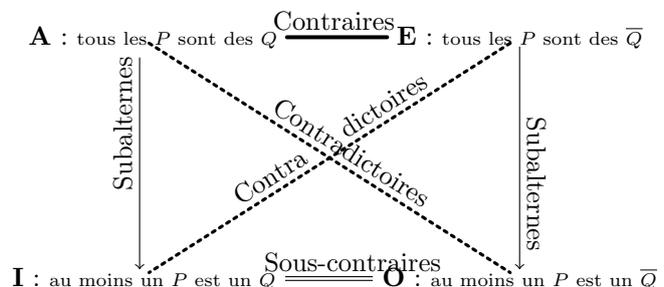


FIGURE 1 – Carré des oppositions

Comme on peut le vérifier, des relations remarquables tiennent dans le carré :

- (i) **A** et **O** (resp. **E** et **I**) sont les négations de l'autre élément de la paire;

- (ii) **A** implique **I**, et **E** implique **O** (on suppose qu'il y a au moins un P afin d'éviter les problèmes d'"import existentiel");

- (iii) **A** et **E** ne peuvent être vrais ensemble, mais peuvent éventuellement être faux ensemble;

- (iv) **I** et **O** ne peuvent être faux ensemble, mais peuvent éventuellement être vrais ensemble.

Blanché [6, 7] remarqua que si on ajoutait deux autres sommets **U** et **Y** définis respectivement comme la disjonction de **A** et **E**, et comme la conjonction de **I** et **O**, on obtient un hexagone **AUEOYI** qui comprend 3 carrés d'opposition, **AEIOI**, **YAUO**, **YEUI** chacun satisfaisant les quatre types de relation ci-dessus. Un tel hexagone est obtenu chaque fois qu'on part de 3 situations mutuellement exclusives, telles que **A**, **E**, et **Y** [15]. Ces hexagones présentent un intérêt particulier pour l'argumentation abstraite, les "rough sets" et l'analyse formelle de concepts [1, 9] notamment. Cependant, nous les laissons en dehors du cadre de cette étude, pour se concentrer sur une autre extension du carré, à savoir le cube des oppositions.

En utilisant les notations de la logique du premier ordre, et en changeant P en $\neg P$, et Q en $\neg Q$ on obtient un autre carré des oppositions **aeoi** similaire, où on suppose aussi que l'ensemble des "non- P " est non-vide. Les 8 énoncés, **A**, **I**, **E**, **O**, **a**, **i**, **e**, **o** peuvent être alors organisés en ce qui peut être appelé un *cube des oppositions* [15] comme en Figure 2. La face de devant et la face de derrière du cube sont des carrés des oppositions au sens traditionnel, où les segments épais sans flèche relient des contraires, les segments à lignes doubles fines, sans flèche, des sous-contraires, les diagonales en pointillés sans flèche des contradictoires, et les lignes verticales avec une flèche vers le bas pointent vers des subalternes, et expriment des implications.

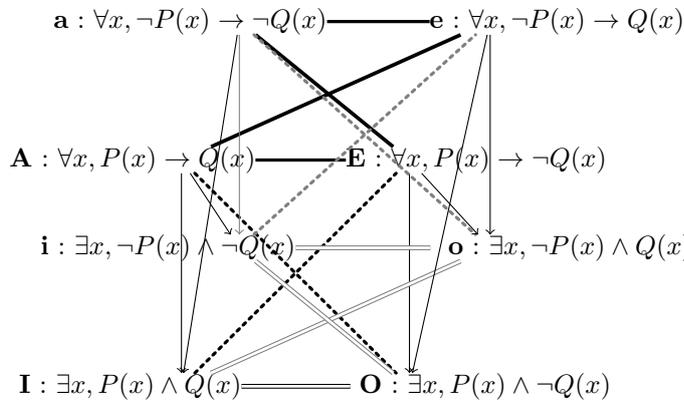


FIGURE 2 – Cube des oppositions des énoncés quantifiés

On suppose non seulement qu'il y a au moins un P et au moins un non- P , mais aussi qu'il y a au moins un Q et au moins un non- Q . On peut vérifier alors que **A** implique **i**, **a** implique **I**, **e** implique **O**, et **E** implique **o**. On peut noter aussi que les sommets **a** et **E**, ainsi que **A** et **e** ne peuvent pas être vrais ensemble (e.g., en effet avoir à la fois **A** et **e** vrais contredirait que $\exists x, \neg Q(x)$), tandis que les sommets **i** et **O**, ainsi que **I** et **o** ne peuvent pas être faux ensemble. Enfin, notons qu'il n'y a aucun lien logique entre **A** et **a**, **E** et **e**, **I** et **i**, ou **O** et **o**.

De manière assez remarquable, on peut vérifier que le groupe de transformations de Piaget I, N, R, C [29] est à l'œuvre dans les plans diagonaux entre les deux faces latérales du cube de la Figure 2. Les transformations de ce groupe s'appliquent à tout énoncé $\Phi(p, q, \dots)$ et ont pour résultats $N(\Phi(p, q, \dots)) = \neg\Phi(p, q, \dots)$, $R(\Phi(p, q, \dots)) = \Phi(\neg p, \neg q, \dots)$, $C(\Phi(p, q, \dots)) = \neg\Phi(\neg p, \neg q, \dots)$, où p, q dénotent des littéraux, et I est l'identité. En effet, on a $\mathbf{a} = R(\mathbf{A})$, $\mathbf{o} = N(\mathbf{a})$, $\mathbf{e} = C(\mathbf{a})$, et $N \circ R \circ C = I$. Dans ces transformations, deux négations involutives interviennent, une externe N , et une interne R . Dans le carré initial, la négation "interne" s'applique seulement à Q , tandis qu'une seconde négation "interne" s'applique seulement à P , quand on passe du carré au cube. Cela devient encore plus clair avec l'interprétation relationnelle du cube présentée dans la section suivante. Il est clair que la propriété d'involution de la négation est cruciale pour obtenir les propriétés du cube (ainsi que la propriété de contraposition de l'implication).

3 Le cube relationnel

Il a été récemment remarqué [9] que toute relation binaire R sur un produit cartésien $X \times Y$ (on peut avoir $Y = X$), composée avec un sous-ensemble, donnait naissance à un cube des oppositions. On suppose $R \neq \emptyset$. Soit $xR = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$. \bar{R} dénote la relation complémentaire ($x\bar{R}y$ ssi $(x, y) \notin R$), et R^t la relation transposée ($xR^t y$ si et seulement si yRx); yR^t est aussi dénoté de façon équivalente $Ry = \{x \in X \mid (x, y) \in R\}$. De plus, on suppose que $\forall x, xR \neq \emptyset$, ce qui signifie que la relation R est *sérielle*, c'est-à-dire $\forall x, \exists y$ t. q. $(x, y) \in R$. De manière similaire R^t est supposée sérielle, i.e., $\forall y, Ry \neq \emptyset$, de même pour sa \bar{R} et sa transposée, on suppose $\forall x, xR \neq Y$ et $\forall y, Ry \neq X$.

Soit T un sous-ensemble de Y et \bar{T} son complément. On suppose $T \neq \emptyset$ et $T \neq Y$. la composition est définie de la façon usuelle : $R(T) = \{x \in X \mid \exists t \in T, (x, t) \in R\}$. A partir de la relation R et du sous-ensemble T , on peut définir les quatre sous-ensembles suivants de

peuvent être réécrits en termes d'intersections vides d'ensembles d'objets A , B , ou de leurs compléments \bar{A} , \bar{B} , tandis que la face du dessous correspond à des intersections non vides. Voir Fig.4. Il est à noter qu'on suppose ici que $A \neq \emptyset$, $\bar{A} \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, et $\bar{B} \neq \emptyset$, afin d'éviter la contrepartie des problèmes d'"import existentiel", puisque maintenant les ensembles A et B jouent des rôles symétriques dans les expressions associées aux sommets du cube.

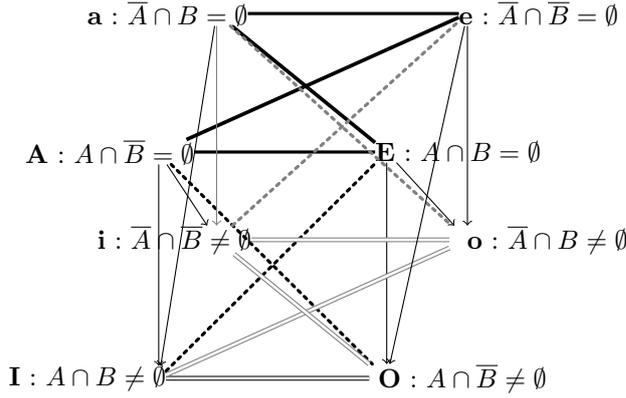


FIGURE 4 – Cube des oppositions des indicateurs de comparaison

Il est à noter que les faces latérales du cube de la Fig. 4 exhibent les quatre indicateurs de comparaison de base existant entre deux ensembles A et B , à savoir ce qu'ils ont en commun de manière positive ($S = A \cap B$), ou négative ($T = \bar{A} \cap \bar{B}$), en quoi A diffère de B ($U = A \cap \bar{B}$), et en quoi B diffère de A ($V = \bar{A} \cap B$). Quand on compare deux sous-ensembles, considérant qu'un indicateur ensembliste peut ou non être vide, on a $2^4 = 16$ configurations qui sont résumées en Table 1.

configuration	$S = A \cap B \neq \emptyset$	$U = A \cap \bar{B} \neq \emptyset$	$V = \bar{A} \cap B \neq \emptyset$	$T = \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$
1 $A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B;$ $B \not\subseteq A; A \cup B \neq \mathcal{U}$	1	1	1	1
2 $A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B;$ $B \not\subseteq A; A \cup B = \mathcal{U}$	1	1	1	0
3 $B \subset A \subset \mathcal{U}$	1	1	0	1
4 $B \subset A; A = \mathcal{U}$	1	1	0	0
5 $A \subset B \subset \mathcal{U}$	1	0	1	1
6 $A \subset B; B = \mathcal{U}$	1	0	1	0
7 $A = B \subset \mathcal{U}$	1	0	0	1
8 $A = B = \mathcal{U}$	1	0	0	0
9 $A \cap B = \emptyset; A \cup B \neq \mathcal{U}$	0	1	1	1
10 $A \cap B = \emptyset; A \cup B = \mathcal{U}$	0	1	1	0
11 $A \subset \mathcal{U}; B = \emptyset;$	0	1	0	1
12 $A = \mathcal{U}; B = \emptyset;$	0	1	0	0
13 $A = \emptyset; B \subset \mathcal{U}$	0	0	1	1
14 $A = \emptyset; B = \mathcal{U}$	0	0	1	0
15 $A = B = \emptyset; \mathcal{U} \neq \emptyset$	0	0	0	1
16 $A = B = \emptyset = \mathcal{U}$	0	0	0	0

TABLE 1 – Configurations respectives de deux sous-ensembles

Comme on peut le voir sur la Table 1, les lignes 1 et 2 correspondent à des situations de chevauchement sans inclusion, avec couverture du référentiel ($A \cup B = \mathcal{U}$) ou non. Les lignes 3, 4, 5 et 6 correspondent à des

situations d'inclusion, avec couverture du référentiel ou non. Les lignes 7 et 8 correspondent à des situations d'égalité, avec couverture du référentiel ou non. Les lignes 9 et 10 correspondent à des situations de non chevauchement, avec couverture du référentiel ou non. Les 6 dernières lignes correspondent à des situations pathologiques où A ou B sont vides, avec couverture du référentiel ou non. Ceci montre que les quatre indicateurs de la Table 1 sont *conjointement nécessaires* pour décrire toutes les situations possibles relatives aux positions possibles de deux sous-ensembles A et B , qui peuvent être vides, dans un référentiel \mathcal{U} . De plus on peut vérifier les propriétés suivantes sur la Table 1 :

$$- S \cup T \cup U \cup V = \mathcal{U}.$$

Cela signifie que les 4 ensembles ne peuvent être simultanément vides, sauf si le référentiel \mathcal{U} est vide ce qui est le cas en ligne 16 de la Table 1.

- Sous les conditions $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \neq \mathcal{U}, B \neq \mathcal{U}$, on a

si $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ou $\bar{A} \cap B = \emptyset$, alors $A \cap B \neq \emptyset$ et $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Cela correspond aux lignes 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10 de la Table 1. Cela correspond aussi aux 5 configurations possibles de deux sous-ensembles non-vides A et B (lignes 1, 3, 5, 7, 9), identifiées pour première fois par Gergonne [23, 21] dans sa discussion des syllogismes, plus les deux configurations (lignes 2, 10) où $A \cup B = \mathcal{U}$ (mais où $A \neq \mathcal{U}, B \neq \mathcal{U}$).

Un mérite du cube de la Fig. 4 est qu'il rend évident que le cube des oppositions est compatible avec une version tout-ou-rien de la théorie des possibilités, comme déjà remarqué d'une autre manière dans [15]. En effet, soit $B = E$ ($E \neq \emptyset, E \neq \mathcal{U}$) un sous-ensemble qui représente l'information disponible, c'est-à-dire qu'on sait que le monde réel est dans E . Si on considère un événement A , les sommets **A**, **I**, **a** et **i** correspondent respectivement exactement à $N(A) = 1$ (défini par $N(A) = 1$ si $A \subseteq E$, et $N(A) = 0$ sinon), $\Pi(A) = 1$ (défini par $\Pi(A) = 1$ si $A \cap E \neq \emptyset$, et $\Pi(A) = 0$ sinon), $\Delta(A) = 1$ (défini par $\Delta(A) = 1$ si $E \subseteq A$, et $\Delta(A) = 0$ sinon), $\nabla(A) = 1$ (défini par $\nabla(A) = 1$ si $A \cup E \neq \mathcal{U}$, et $\nabla(A) = 0$ sinon), où N, Π, Δ , et ∇ sont respectivement la nécessité forte, la possibilité faible, la possibilité forte, et la nécessité faible. De plus la propriété suivante tient : $\max(N(A), \Delta(A)) \leq \min(\Pi(A), \nabla)$ qui exprime que si un événement est fortement nécessaire ou fortement possible, il doit être à la fois faiblement possible et faiblement nécessaire.

5 Le cube graduel et la théorie des possibilités

Certaines notions sont naturellement une question de degré comme l'incertitude, la similarité, la satisfaction, ou le niveau d'attaque en argumentation. Dans les sections précédentes, tout était binaire dans le carré et dans le cube des oppositions. Mais cela fait sens d'avoir des modalités graduées, que la théorie des possibilités soit graduelle, et plus généralement d'avoir des relations graduées ou des sous-ensembles flous dans les constructions précédentes du cube. Cela permettrait aussi d'englober des extensions graduelles de la théorie des "rough sets", de l'analyse formelle de concepts (comme, e.g., celle proposée dans [3]), ou de l'argumentation abstraite [19]. Dans ce qui suit, on définit une extension graduelle du cube des oppositions, et indiquons ensuite comment elle s'applique à la théorie des possibilités graduées, mais aussi à d'autres cadres graduels comme l'agrégation multicritère et à l'intégrale de Sugeno d'une part, et aux fonctions de croyance de Shafer d'autre part, laissant pour des études détaillées futures les autres extensions graduelles mentionnées ci-dessus.

Les extensions graduelles du cube doivent satisfaire une version multi-valuée des contraintes (i)-(iv) du carré des oppositions (voir Section 2) pour les faces de devant et de derrière, ainsi que des contraintes d'implication des faces latérales, des contraintes exclusion mutuelle de la face de dessus, et des contraintes duales de la face de dessous. Soient $\alpha, \iota, \epsilon, o$, et $\alpha', \iota', \epsilon', o'$ les degrés dans $[0, 1]$ associés respectivement aux sommets **A**, **I**, **E**, **O** et **a**, **i**, **e**, **o**. Etant donné une négation involutive n , une conjonction symétrique $*$, et interprétant l'implication en logique multi-valente par l'inégalité \leq (la conclusion est au moins aussi vraie que la prémisse), les contraintes pour les faces de devant et de derrière du cube s'écrivent alors

- (i) $\alpha = n(o)$, $\epsilon = n(\iota)$ et $\alpha' = n(o')$ et $\epsilon' = n(\iota')$;
- (ii) $\alpha \leq \iota$, $\epsilon \leq o$ et $\alpha' \leq \iota'$, $\epsilon' \leq o'$;
- (iii) $\alpha * \epsilon = 0$ et $\alpha' * \epsilon' = 0$;
- (iv) $n(\iota) * n(o) = 0$ et $n(\iota') * n(o') = 0$.

Les contraintes associées aux faces latérales

- (v) $\alpha \leq \iota'$, $\alpha' \leq \iota$ et $\epsilon' \leq o$, $\epsilon \leq o'$;

et pour les faces de dessus et de dessous, on a :

- (vi) $\alpha' * \epsilon = 0$, $\alpha * \epsilon' = 0$;
- (vii) $n(\iota') * n(o) = 0$, $n(\iota) * n(o') = 0$.

Le choix standard pour une négation involutive est $n(\gamma) = 1 - \gamma$. Plusieurs choix peuvent être considérés pour l'opérateur de conjonction $*$. Deux choix présentant un intérêt particulier sont $*$ = min, tel que $\min(\gamma, \delta) = 0$ ssi $\gamma = 0$ ou $\delta = 0$, et la conjonction de Łukasiewicz $*$ = $\max(0, \cdot + \cdot - 1)$, telle que $\max(0, \gamma + \delta - 1) = 0$ ssi $\gamma \leq n(\delta)$ ssi $\min(\gamma, \delta) \leq 0.5$.

Notons que si $*$ est la conjonction de Łukasiewicz, alors les conditions (vi-vii) du dessus et du dessous sont équivalentes à celles des faces latérales (v). En effet, de $\alpha' * \epsilon = 0$, on obtient $\alpha' * n(\iota) = 0$ qui tient ssi $\alpha' \leq \iota$. Les autres conditions s'obtiennent de manière similaire. Des résultats plus faibles peuvent être établis pour $*$ = min : les conditions (v) sont plus faibles que les conditions (vi-vii). En effet, $\min(\alpha', \epsilon) = 0$ implique $\alpha' = 0$ ou $\epsilon = 0$, et par conséquent $\alpha' \leq \iota = n(\epsilon)$. D'autre part, α' peut être plus petit ou égal à ι avec $\alpha \neq 0$ et $\iota \neq 1$.

Un tel cube graduel peut recevoir différentes instanciations. Une est en termes de théorie des possibilités (graduées) [14], comme indiqué brièvement ci-dessous. Considérons une distribution de possibilités normalisée $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$, qui est aussi telle que $1 - \pi$ est normalisée (i.e., $\exists \omega \in \Omega, \pi(\omega) = 0$), soit $\Delta(A) = \min_{\omega \in A} \pi(\omega)$ la quantité possibilité forte d'une proposition dont A est l'ensemble des modèles, et soit $\nabla(A) = 1 - \Delta(\bar{A})$ sa conjuguée. On peut instancier le carré des oppositions graduel en posant $\alpha' = \Delta(A)$, $\epsilon' = \Delta(\bar{A})$, $\iota' = \nabla(A)$, $o' = \nabla(\bar{A})$. Grâce à la dualité entre ι' , o' on a un carré des oppositions pour $*$ = min, et $n(\gamma) = 1 - \gamma$. En particulier, puisque $\Delta(A) \leq \Pi(A)$ et $\nabla(A) \leq N(A)$, les contraintes des faces latérales tiennent sous la forme (v).

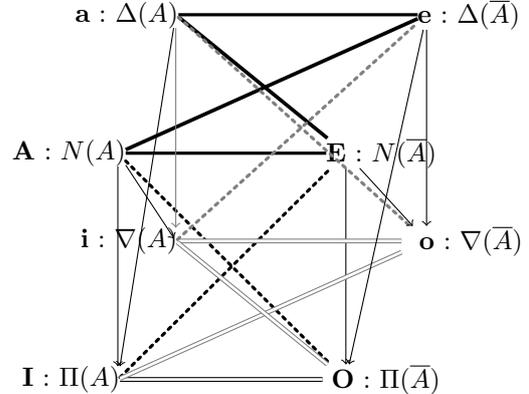


FIGURE 5 – Cube des oppositions en théorie des possibilités

En accord avec la logique épistémique, on peut exprimer qu'au moins C est sûr à un certain degré (i.e., tous les éléments en dehors de C sont quelque peu impossibles), ce qui est représenté par la contrainte $N(C) \geq \gamma > 0$; et qu'aucun énoncé plus précis que D n'est sûr (i.e., tous les éléments dans D sont possibles à un certain degré), ce qui est représenté par la contrainte $\Delta(D) \geq \delta > 0$. Notons que $N_\pi(C) = \Delta_{1-\pi}(\bar{C})$; cependant les quantités $N_\pi(A)$ et $\Delta_\pi(A)$ sont complètement indépendantes l'une de l'autre.

6 Agrégations pondérées. Intégrales de Sugeno

Comme dit dans la partie précédente, la satisfaction est généralement une question de degrés. C'est le cas par exemple pour l'agrégation multicritères où des objets sont évalués par rapport à des critères $i \in \{1, \dots, n\}$. L'évaluation d'un objet f par rapport à un critère i est notée f_i et l'objet est représenté par le vecteur $f = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$. On suppose que $\forall i, f_i \in [0, 1]$. $f_i = 1$ signifie que l'objet satisfait pleinement le critère i , tandis que $f_i = 0$ exprime une totale absence de satisfaction. Soit $\pi_i \in [0, 1]$ le niveau d'importance du critère i . Plus π_i est grand plus le critère est important. De plus on suppose la double normalisation $\exists i, \pi_i = 1$, et $\exists j, \pi_j = 0$.

Le minimum pondéré et le maximum pondéré sont des opérateurs d'agrégation qualitatifs simples [13]. Le premier mesure à quel niveau les critères importants sont satisfaits et correspond à l'expression $\bigwedge_{i=1}^n \pi_i \Rightarrow f_i$, tandis que le second $\bigvee_{i=1}^n \pi_i \wedge f_i$ est optimiste et demande seulement que au moins un critère important soit fortement satisfait. Ces opérateurs d'agrégation correspondent aux sommets **A** et **I** du cube de la Fig. 6.

La condition (i) de la face de devant entraîne $s \Rightarrow t = (1 - s) \vee t$ qui est la forte implication associée à $\wedge = \min$. On peut montrer facilement que le cube de la Fig. 6 est juste la contrepartie multi valuée du cube initial de la Fig. 2. La valeur de $MIN_\pi(f) = \bigwedge_{i=1}^n \pi_i \Rightarrow f_i$ est d'autant plus grande que tous les critères importants sont beaucoup satisfaits. L'opérateur $MIN_\pi^{neg}(f) = \bigwedge_{i=1}^n (1 - \pi_i) \Rightarrow (1 - f_i)$ tolère de faibles évaluations ($1 - f_i$ est grand) quand les critères ont une importance faible. Les agrégations de la face de devant du cube de la Fig. 6 sont des évaluations positives qui se focalisent sur les critères importants fortement satisfaits, tandis que les agrégations de la face de derrière sont négatives car elles prennent en compte l'absence de dissatisfactions pour les critères importants. Ceux sont deux points de vue complémentaires récemment proposés pour l'agrégation multi-critères [17]. Le cube de la Fig. 6 satisfait toutes les propriétés (i-vii) du cube des oppositions gradué if $* = \max(0, \cdot + \cdot - 1)$ est la conjonction de Łukasiewicz.

Les intégrales de Sugeno [31] [24] constituent une importante famille d'opérateurs d'agrégation qualitatifs qui inclut les minimum et maximum pondérés comme cas particuliers, et où les sous-ensembles de critères peuvent être pondérés (et pas seulement les critères) pour exprimer les synergies au sein de ces sous-ensembles. L'intégrale de Sugeno est définie par :

$$\oint_\gamma(f) = \bigvee_{A \subseteq C} \gamma(A) \wedge \bigwedge_{i \in A} f_i$$

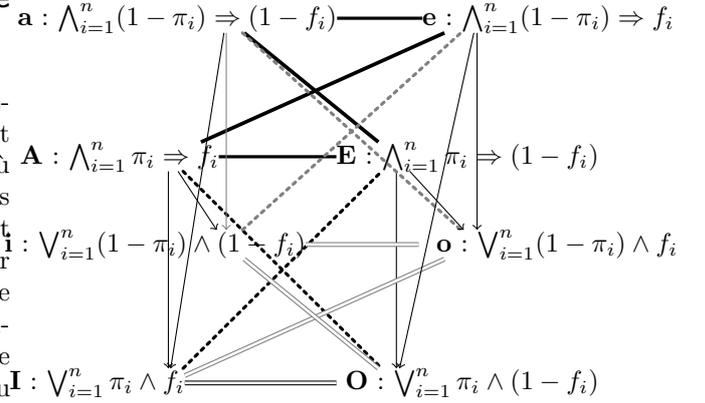


FIGURE 6 – Cube des agrégations pondérées qualitatives

où le niveau d'importance des sous-ensembles de critères A est représenté par une fonction d'ensemble, appelée capacité, qui est une application $\gamma : 2^C \rightarrow L$ telle que $\gamma(\emptyset) = 0$, $\gamma(C) = 1$, et si $A \subseteq B$ alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. Les mesures de possibilité Π , ou les mesures de nécessité N sont des exemples de capacités. Notons que si f est la fonction caractéristique de l'ensemble $F \subseteq C$, alors $\oint_\gamma(f) = \gamma(F)$.

L'implication de **A** vers **I** dans le cube de la Fig. 5, qui exprime que $N(A) \leq \Pi(A)$ pour tout A , reflète le fait que N donne une évaluation pessimiste, tandis que $\Pi(A)$ est une évaluation optimiste. Afin de généraliser cette situation à toute capacité γ , on a besoin d'introduire la partie pessimiste γ_* et la partie optimiste γ^* de γ . Pour cela on a besoin de définir la conjuguée $\gamma^c(A)$ d'une capacité γ , i.e. la capacité $\gamma^c(A) = 1 - \gamma(\bar{A})$, $\forall A \subseteq C$, où \bar{A} est le complémentaire du sous-ensemble A . En raison de la dualité $N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$, N et Π sont conjuguées l'une de l'autre. Alors, soit $\gamma_*(A) = \min(\gamma(A), \gamma^c(A))$ et $\gamma^*(A) = \max(\gamma(A), \gamma^c(A))$. On a $\gamma_*(A) \leq \gamma^*(A)$. Notons que $\gamma_*(A) = 1 - \gamma^*(\bar{A})$ (γ_* et γ^* sont conjuguées). On peut alors construire la face de devant du cube de la Fig. 7, où γ_* est utilisée sur les sommets **A** et **E**, tandis que γ^* apparaît sur les sommets **I** et **O**. On peut montrer que cette face satisfait toutes les propriétés (i)-(iv) d'un carré des oppositions avec la conjonction de Łukasiewicz $* = \max(0, \cdot + \cdot - 1)$.

Le face de derrière du cube de la Fig. 7 est obtenue en changeant l'intégrale \oint_γ en une désintégrale [17] $\oint_\nu^\downarrow(f) = \oint_{1-\nu^c}(1 - f)$, où ν est appelée une anti-capacité, car c'est une fonction d'ensemble décroissante (alors $1 - \nu^c$ est une capacité, où $\nu^c(A) = 1 - \nu(\bar{A})$). Etant donnée une capacité pessimiste γ , l'anti capacité associée ν est définie par $\nu(A) = \bar{\gamma}(\bar{A})$ à partir du complément pessimiste de la capacité $\bar{\gamma}$, lui même défini de la manière suivante. Tout

d'abord rappelons ce qu'est la transformée de Moebius qualitative γ_{\sharp} d'une capacité $\gamma : \gamma_{\sharp}(E) = \gamma(E)$ si $\gamma(E) > \max_{B \subsetneq E} \gamma(B)$ et $\gamma_{\sharp}(E) = 0$ sinon. Alors $\gamma(A) = \max_{E \subseteq A} \gamma_{\sharp}(E)$ (c'est la contrepartie qualitative de la définition des fonctions de croyance à partir de la fonction de masse). On peut alors définir la complémentaire $\bar{\gamma}_{\sharp}$ de γ_{\sharp} par $\bar{\gamma}_{\sharp}(\bar{E}) = \gamma_{\sharp}(E)$ pour tout E . A partir de la complémentaire on définit $\bar{\gamma}(A) = \max_{E \subseteq A} \bar{\gamma}_{\sharp}(E) = \max_{\bar{E} \subseteq \bar{A}} \gamma_{\sharp}(E)$, ceci rend évident que $\bar{\gamma}(\bar{A})$ généralise $\Delta(A)$ de la théorie des possibilités (en effet $\bar{\gamma}(\bar{A}) = \max_{A \subseteq E} \gamma_{\sharp}(E)$). Alors $\mathcal{f}_{\nu}^{\downarrow}(f) = \mathcal{f}_{1-\nu^c}(1-f) = \mathcal{f}_{\bar{\gamma}}(1-f)$ car $1 - \nu^c(A) = \nu(\bar{A}) = \bar{\gamma}(A)$.

Lorsque γ est une mesure de nécessité, $\nu(A)$ devient $\Delta(A) = N_{1-\pi}(\bar{A})$. Les désintégrales généralisent l'opérateur qualitatif MIN_{π}^{neg} qui se focalisent sur les dissatisfactions des objets lors du processus d'évaluation. Il est alors possible de vérifier que toutes les propriétés (i)-(vii) du cube des oppositions gradué pour la conjonction de Lukasiewicz $* = \max(0, \cdot + \cdot - 1)$ sont satisfaites dans le cube de la Fig. 7, qui généralise le cube Fig. 6.

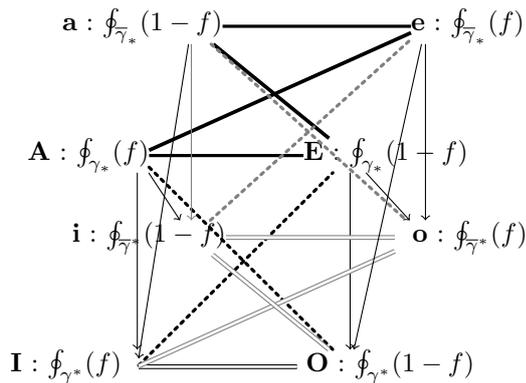


FIGURE 7 – Cube des oppositions induit par une intégrale de Sugeno

7 Cube des oppositions des fonctions de croyance

Dans la théorie de l'évidence de Shafer [30], une fonction de croyance et sa duale la fonction de plausibilité sont définies à partir d'une fonction de masse $m : Bel_m(A) = \sum_{E \subseteq A} m(E)$ pour $A \subseteq \mathcal{U}$. et $Pl_m(A) = 1 - Bel_m(\bar{A}) = \sum_{E \cap A \neq \emptyset} m(E)$. On suppose que $m(\emptyset) = 0$ et $\sum_E m(E) = 1$. La fonction de masse complémentaire \bar{m} est définie par $\bar{m}(E) = m(\bar{E})$ [12]. La condition de normalisation $\bar{m}(\emptyset) = 0$ impose que $m(\mathcal{U}) = 0$. La fonction de communalité Q et sa dualité \hat{O} sont définies par $Q_m(A) = \sum_{A \subseteq E} m(E) = Bel_{\bar{m}}(\bar{A})$ et $\hat{O}_m(A) = \sum_{\bar{E} \cap \bar{A} \neq \emptyset} m(E) = 1 - Q_m(\bar{A}) = Pl_{\bar{m}}(\bar{A})$. Il est facile de vérifier que la transformation $m \rightarrow \bar{m}$

revient à la transformation $\pi \rightarrow 1-\pi$ dans le cas d'éléments focaux emboîtés (i.e. les ensembles E tels que $m(E) > 0$). Cela montre que la théorie des possibilités et le cube Fig. 8 sont la contrepartie du cube Fig. 5. De plus, les fonctions de croyance s'étendent à des fonctions caractéristiques d'ensembles fous sous la forme $Bel_m(A) = \sum_E m(E) \cdot \min_{u \in E} \mu_A(u)$, ce qui est un cas particulier de l'intégrale de Choquet, comme la nécessité d'un évènement flou $MIN_{\pi}(f)$ est un cas particulier de l'intégrale de Sugeno. Il est évident que dans le cube Fig. 8, les fonctions d'ensemble s'étendent à des évènements fous, et que plus généralement on peut considérer son extension aux intégrales de Choquet.

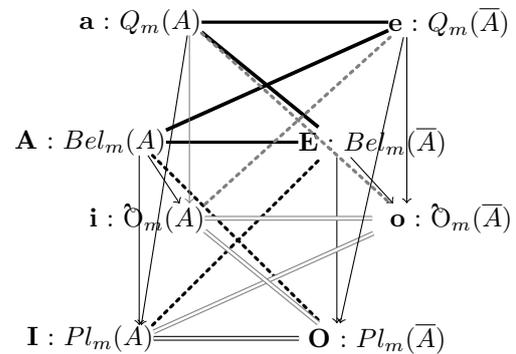


FIGURE 8 – Cube des oppositions des fonctions de croyance

8 Conclusion

Nous avons vu que le cube des oppositions fait sens pour une grande variété de situations incluant des cadres qualitatifs graduels et des cadres quantitatifs de modélisation. Les 4 entités associées aux faces latérales du cube ne sont que faiblement liées entre elles et sont toutes nécessaires pour décrire ou évaluer complètement une situation. L'existence de la face de derrière complète sur un mode renversé ce qui est à l'œuvre dans le carré des oppositions de devant. Prendre conscience de l'existence d'un cube des oppositions pour un cadre de modélisation donné, peut aider à introduire de nouvelles notions utiles de façon à avoir un cube complet. Le cube des oppositions peut aussi aider à faire de fructueux parallèles entre des théories, ou à les hybrider. L'auto-dualité des probabilités ($Prob(\bar{A}) = 1 - P(A)$) empêche leur association avec un carré et un cube des oppositions non dégénérés ; la possibilité de l'introduction des probabilités supérieures et inférieures générales (au delà des fonctions de croyance) dans un cube d'opposition reste à étudier.

Références

- [1] L. Amgoud and H. Prade. Can AI models capture natural language argumentation? *Int. J. Cognit. Inform. and Natural Intellig.*, 6(3) :19–32, 2012.
- [2] L. Amgoud and H. Prade. A formal concept view of abstract argumentation. In L. C. van der Gaag, editor, *Proc. 12th Eur. Conf. Symb. and Quant. Appr. to Reas. with Uncert. (ECS-QARU'13)*, Utrecht, July 8-10, LNCS 7958, pages 1–12. Springer, 2013.
- [3] R. Belohlavek. *Fuzzy Relational Systems : Foundations and Principles*. Kluwer Aca. Pu., 2002.
- [4] J.-Y. Béziau. New light on the square of oppositions and its nameless corner. *Logical Investigations*, 10 :218–233, 2003.
- [5] J.-Y. Béziau. The power of the hexagon. *Logica Universalis*, 6 (1-2) :1–43, 2012.
- [6] R. Blanché. Sur l'opposition des concepts. *Theoria*, 19 :89–130, 1953.
- [7] R. Blanché. *Structures Intellectuelles. Essai sur l'Organisation Systématique des Concepts*. Vrin, Paris, 1966.
- [8] B. F. Chellas. *Modal Logic, an Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [9] D. Ciucci, D. Dubois, and H. Prade. The structure of oppositions in rough set theory and formal concept analysis - Toward a new bridge between the two settings. In C. Beierle and C. Meghini, editors, *Proc. 8th Int. Symp. on Foundations of Information and Knowledge Systems (FoIKS'14)*, Bordeaux, Mar. 3-7, volume 8367 of LNCS, pages 154–173. Springer, 2014.
- [10] D. Dubois, P. Hájek, and H. Prade. Knowledge-driven versus data-driven logics. *J. of Logic, Language and Information*, 9(1) :65–89, 2000.
- [11] D. Dubois, E. Lorini, and H. Prade. Bipolar possibility theory as a basis for a logic of desires and beliefs. In W. Liu, V. S. Subrahmanian, and J. Wijsen, editors, *Proc. 7th Int. Conf. on Scalable Uncertainty Management - SUM'13 Washington, DC, Sept. 16-18*, volume 8078 of LNCS, pages 204–218. Springer, 2013.
- [12] D. Dubois and H. Prade. A set-theoretic view of belief functions. Logical operations and approximation by fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, 12(3) :193–226, 1986.
- [13] D. Dubois and H. Prade. Weighted minimum and maximum operations, An addendum to 'A review of fuzzy set aggregation connectives'. *Information Sciences*, 39 :205–210, 1986.
- [14] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory : Qualitative and quantitative aspects. In D. M. Gabbay and Ph. Smets, editors, *Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision*, volume 1 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, pages 169–226. Kluwer Acad. Publ., 1998.
- [15] D. Dubois and H. Prade. From Blanché's hexagonal organization of concepts to formal concept analysis and possibility theory. *Logica Univers.*, 6 :149–169, 2012.
- [16] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory and formal concept analysis : Characterizing independent sub-contexts. *Fuzzy Sets and Systems*, 196 :4–16, 2012.
- [17] D. Dubois, H. Prade, and A. Rico. Qualitative integrals and desintegrals : How to handle positive and negative scales in evaluation. In S. Greco et al., editor, *Proc. 14th Int. Conf. on Inform. Process. and Mgmt. of Uncert. in Knowledge-Based Syst. (IPMU'12, Part III)*, Catania, July 9-13, volume 299 of CCIS, pages 306–316. Springer, 2012.
- [18] Phan Minh Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, 77(2) :321–358, 1995.
- [19] P. E. Dunne, A. Hunter, P. McBurney, S. Parsons, and M. Wooldridge. Weighted argument systems : Basic definitions, algorithms, and complexity results. *Artificial Intelligence*, 175(2) :457–486, 2011.
- [20] L. Euler. Lettres cii-cviii. In *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur Divers Sujets de Physique & de Philosophie*, vol 2. 1768.
- [21] J. A. Faris. The Gergonne relations. *J. of Symbolic Logic*, 20 (3) :207–231, 1955.
- [22] B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis : Mathematical Foundations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [23] J. D. Gergonne. Essai de dialectique rationnelle. *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7 :189–228, 1816.
- [24] M. Grabisch and Ch. Labreuche. A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *Annals of Oper. Res.*, 175 :247–286, 2010.
- [25] H. J. Levesque. All I know : A study in autoepistemic logic. *Artif. Intellig.*, 42(2-3) :263–309, 1990.

- [26] P. Marquis, O. Papini, and H. Prade. Some elements for a prehistory of artificial intelligence in the last four centuries. In T. Schaub, G. Friedrich, and B. O'Sullivan, editors, *Proc. 21st Europ. Conf. on Artificial Intelligence (ECAI'14)*, Prague, Aug. 18-22, pages 609–614. IOS Press, 2014.
- [27] T. Parsons. The traditional square of opposition. In E. N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2008.
- [28] Z. Pawlak. *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Kluwer, 1991.
- [29] J. Piaget. *Logic and Psychology*. Manchester Univ. Press, 1953.
- [30] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [31] M. Sugeno. Fuzzy measures and fuzzy integrals : a survey. In M. M. Gupta, G. N. Saridis, and B. R. Gaines, editors, *Fuzzy Automata and Decision Processes*, pages 89–102. North-Holland, 1977.