Révision de bases de croyances : complexité de la vérification de modèle*

Nadia Creignou[1] **Raida Ktari**[1,2] **Odile Papini**[2]

[1] Aix-Marseille Université, CNRS, LIF UMR 7279, 13288 Marseille, France
[2] Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296, 13288 Marseille, France
{nadia.creignou, raida.ktari, odile.papini}@univ-amu.fr

Résumé

Cet article porte sur la complexité du problème de vérification de modèle pour des opérateurs de révision de bases de croyances. Nous poursuivons l'étude initiée par Liberatore & Schaerf et introduisons deux nouveaux opérateurs de révision de bases de croyances reposant sur les sous-bases de croyances cohérentes de cardinalité maximale. Nous établissons la complexité de ce problème pour divers opérateurs dans le cas de la logique propositionnelle et dans le cas du fragment de Horn.

Abstract

This paper deals with the complexity of model checking for belief bases revision. We extend the study initiated by Liberatore & Schaerf and introduce two new belief base revision operators stemming from consistent subbases maximal with respect to cardinality. We establish the complexity of this problem for various operators within the framework of propositional logic as well as in the Horn fragment.

1 Introduction

La révision de croyances est une problématique importante en intelligence artificielle. Dans de nombreuses situations un agent dispose d'informations incomplètes, imparfaites ou incertaines et il émet des hypothèses qui peuvent être contredites lors de l'arrivée d'une nouvelle information considérée comme plus fiable. L'opération de révision consiste alors à restaurer la cohérence en conservant la nouvelle information tout en modifiant le moins possible les croyances initiales de l'agent. Ces principes ont été formalisés en termes de postulats (*postulats AGM*) [1] et de nombreux opérateurs ont été proposés dans la littérature, qui sont classés selon deux points de vue, sémantique [11] et syntaxique.

D'un point de vue syntaxique, les croyances de l'agent sont représentées par des bases de croyances, c'est-à-dire des ensembles finis de formules propositionnelles. La plupart des approches reposent sur la construction de sous-bases cohérentes maximales selon différents critères [9, 20, 17, 3, 12, 10, 2]. Hansson a montré qu'il semble naturel de réviser des bases de croyances définies explicitement et d'étendre ensuite ces opérations à des ensembles de croyances en considérant la clôture déductive du résultat de la révision [10]. C'est le point de vue que nous adoptons dans cet article.

Concernant la complexité de la révision de croyances, les premiers travaux [14, 6, 15, 4] ont porté sur le problème d'inférence. A partir d'un ensemble de croyances, d'une nouvelle information et d'une requête (une formule propositionnelle), le problème d'inférence consiste à décider si la requête est une conséquence logique de l'ensemble de croyances révisé par la nouvelle information. Liberatore et Schaerf [13] ont ensuite considéré un autre problème, qu'ils considèrent comme une tâche plus basique, à savoir la vérification de modèle. Etant donné un ensemble de croyances et une nouvelle information, il s'agit de décider si une interprétation est un modèle de l'ensemble de croyances révisé par la nouvelle information. Bien que les problèmes d'inférence et de vérification de modèle soient liés, les résultats de complexité pour le problème de vérification de modèle ne s'obtiennent pas automatiquement à partir de ceux du problème d'inférence [13].

Liberatore & Shaerf [13] se sont concentrés sur les opérateurs syntaxiques reposant sur des sous-bases co-

*Ce travail a bénéficié de l'aide de l'Agence Nationale de la Recherche, projet ASPIQ portant la référence ANR-12-BS02-0003 et projet AGGREG portant la référence ANR-14-CE25-0017-01.

hérentes maximales selon l'inclusion ensembliste, en particulier l'opérateur de Ginsberg [9] et l'opérateur Widtio [20]. Dans cet article, nous définissons un nouvel opérateur RSRW reposant sur des sous-bases cohérentes de cardinalité maximale, et sa généralisation PRSRW à des bases de croyances stratifiées. Nous présentons tous ces opérateurs dans un cadre formel unifié, puis nous étudions la complexité du problème de vérification de modèle pour chacun d'entre eux, dans le cas propositionnel ainsi que dans le cas du fragment de Horn. Nous obtenons ainsi une vue synthétique de l'impact des différentes stratégies et des différents critères de maximalité sur la complexité du problème.

2 Préliminaires

2.1 Notations

Nous nous plaçons dans le cadre de la logique propositionnelle. Nous rappelons qu'un littéral est un atome (littéral positif) ou la négation d'un atome (littéral négatif). Pour tout ensemble d'atomes A, on note $\mathrm{Lit}(A)$ l'ensemble des littéraux construits à partir de A. Une formule CNF est une conjonction de clauses. Une clause est une disjonction de littéraux. Une clause est dite de Horn si elle comporte au plus un littéral positif. Une formule de Horn est une formule formée par la conjonction de clauses de Horn. Soit φ une formule, nous notons $\mathrm{Mod}(\varphi)$ l'ensemble des modèles de φ. Une formule ψ est une conséquence logique de φ, noté $\varphi \models \psi$, si $\mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\psi)$, et les deux formules sont équivalentes, noté $\varphi \equiv \psi$, si $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Nous notons $Cn(\varphi)$ l'ensemble des conséquences logiques de φ. Une théorie T est telle que $T = Cn(T)$, c'est-à-dire que c'est un ensemble de formules déductivement clos.

Dans la suite, nous manipulons des bases de croyances, c'est-à-dire des ensembles finis de formules propositionnelles. Si $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ est un tel ensemble, on note $\bigwedge B$ la conjonction de ses formules $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Ainsi, étant donné une famille d'ensembles finis de formules $\mathcal{W} = \{B_1, \ldots, B_p\}$, la notation $\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge B_i$ sera utilisée pour représenter $\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{\varphi \in B_i} \varphi$.

2.2 Classes de complexité

Les classes P et NP sont les classes des problèmes décidables en temps polynomial déterministe, resp. non déterministe ; la classe coNP est le complémentaire de la classe NP [16]. Un oracle pour une classe $\mathcal{A}$ est un algorithme qui peut donner instantanément la réponse à un problème de la classe $\mathcal{A}$. Pour une classe de complexité $\mathcal{C}$, on notera $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ la classe des problèmes qui peuvent être résolus par un algorithme de la classe $\mathcal{C}$ à condition que l'on puisse faire appel à un oracle pour $\mathcal{A}$. Stockmeyer définit inductivement la hiérarchie polynomiale, dont le premier niveau est constitué des classes P, NP et coNP [18]. Dans cette hiérarchie nous utiliserons en particulier des classes du second niveau, à savoir $\Sigma_2\mathrm{P} = \mathrm{NP}^{\mathrm{NP}}$, $\Delta_2\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}$. Nous utiliserons également la classe $\Theta_2\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}[\log(n)]}$ introduite par Wagner dans [19] et qui constitue une sous classe de $\Delta_2\mathrm{P}$; les problèmes de $\Theta_2\mathrm{P}$ sont ceux de $\Delta_2\mathrm{P}$ qui peuvent être résolus en temps polynomial avec seulement un nombre logarithmique d'appels à l'oracle de NP.

3 Révision de bases de croyances

Un opérateur de révision syntaxique $*$ prend en entrée une base de croyances B et une formule μ représentant une nouvelle information, et renvoie une nouvelle base de croyances $B * \mu$. Ces opérateurs sont basés sur la recherche de $\mathcal{W}(B, \mu)$, l'ensemble des sous-bases maximales de B cohérentes avec la nouvelle information μ. Ils exploitent ensuite cet ensemble pour définir la base de croyances révisée selon une certaine stratégie. Nous distinguons deux stratégies. La première considère toutes les sous-bases maximales aussi plausibles les unes que les autres. La seconde repose sur l'intersection des sous-bases maximales cohérentes, c'est-à-dire ne retient que les informations qui ne sont jamais remises en question.

Nous définissons deux opérateurs utilisant la cardinalité comme critère de maximalité, RSRG et RSRW. Dans de nombreuses applications le critère de cardinalité est utilisé car l'acquisition d'information est coûteuse. Par ailleurs, l'extension de RSRG aux ensembles de croyances vérifie tous les postulats AGM [2]. Ces deux opérateurs correspondent aux deux stratégies que nous considérons, l'une prudente (RSRW), l'autre plus permissive (RSRG).

Nous considérons l'ensemble des sous-bases cohérentes maximales par cardinalité, $\mathcal{W}_{card}(B, \mu) = \{B_1 \subseteq B \mid \bigwedge B_1 \not\models \neg\mu$ et pour tout $B_2 \subseteq B$ tel que $|B_1| < |B_2|, \bigwedge B_2 \models \neg\mu\}$.

Les deux stratégies précédentes donnent alors lieu à deux opérateurs RSRG [2] et RSRW [1] définis comme suit :

$$B *_{\mathrm{RSRG}} \mu = \bigvee_{B' \in \mathcal{W}_{card}(B,\mu)} \bigwedge (B' \cup \{\mu\}),$$
$$B *_{\mathrm{RSRW}} \mu = \bigwedge \bigcap_{B' \in \mathcal{W}_{card}(B,\mu)} B' \cup \{\mu\}.$$

Une interprétation m est un modèle de la base de

1. La notation RSR provient de l'expression *"Removed Sets Revision"* qualifiant les opérateurs basés sur le retrait du plus petit nombre de formules de la base initiale [2]

croyances révisée, $m \models B * \mu$, si et seulement si m est un modèle de μ et

— d'au moins un ensemble de $\mathcal{W}_{card}(B,\mu)$, dans le cas de RSRG,

— de chacune des formules apparaissant dans toutes les sous-bases cohérentes maximales, c'est-à-dire dans tous les ensembles de $\mathcal{W}_{card}(B,\mu)$, dans le cas de RSRW.

Ces deux opérateurs sont analogues à l'opérateur de Ginsberg, $*_{\mathrm{G}}$, [9] et l'opérateur Widtio, $*_{\mathrm{wid}}$, [20]. Ces derniers utilisent l'inclusion ensembliste comme critère de maximalité et considèrent donc $\mathcal{W}_{\subseteq}(B,\mu) = \{B_1 \subseteq B \mid \bigwedge B_1 \not\models \neg\mu$ et pour tout B_2 tel que $B_1 \subset B_2 \subseteq B$, $\bigwedge B_2 \models \neg\mu\}$, au lieu de $\mathcal{W}_{card}$. Ils sont définis par :

$$B *_{\mathrm{G}} \mu = \bigvee_{B' \in \mathcal{W}_{\subseteq}(B,\mu)} \bigwedge (B' \cup \{\mu\}),$$
$$B *_{\mathrm{wid}} \mu = \bigwedge \bigcap_{B' \in \mathcal{W}_{\subseteq}(B,\mu)} (B' \cup \{\mu\}).$$

Les opérateurs RSRG et RSRW peuvent être étendus à des bases de croyances stratifiées. Une base de croyances stratifiée $B = (S_1, ..., S_n)$ est donnée par une partition de la base de croyances en strates S_i ($1 \leq i \leq n$) représentant différentes priorités entre formules.

Etant donné $X \subseteq B$ un ensemble de formules, nous définissons $trace(X,B)$ par le n-uplet d'entiers formé par : $trace(X,B) = (|X \cap S_1|, ..., |X \cap S_n|)$. L'ordre lexicographique usuel, noté $\leq_{lex}$, sur les traces fournit un nouveau critère de maximalité pour les sous-bases cohérentes. Nous définissons l'ensemble des sous-bases cohérentes maximales selon ce critère par $\mathcal{W}_{cardlex}(B,\mu) = \{B_1 \subseteq B \mid \bigwedge B_1 \not\models \neg\mu$ et pour tout $B_2 \subseteq B$ tel que $trace(B_1,B) <_{lex} trace(B_2,B), \bigwedge B_2 \models \neg\mu\}$.

Observons que tous les éléments de $\mathcal{W}_{cardlex}(B,\mu)$ ont la même trace, que nous noterons $\mathrm{Tracemax}(B,\mu)$. De plus, on a $\mathcal{W}_{cardlex}(B,\mu) \subseteq \mathcal{W}_{\subseteq}(B,\mu)$. Les opérateurs PRSRG [2, 3] et PRSRW sont alors définis comme suit :

$$B *_{\mathrm{PRSRG}} \mu = \bigvee_{B' \in \mathcal{W}_{cardlex}(B,\mu)} \bigwedge (B' \cup \{\mu\}),$$
$$B *_{\mathrm{PRSRW}} \mu = \bigwedge \bigcap_{B' \in \mathcal{W}_{cardlex}(B,\mu)} (B' \cup \{\mu\}).$$

Lorsqu'une base de croyances n'est pas stratifiée, la cardinalité et la trace coïncident et les opérateurs PRSRG et PRSRW coïncident alors respectivement avec les opérateurs RSRG et RSRW.

4 Complexité de la vérification de modèle

Nous nous intéressons à la complexité du problème de vérification de modèle défini comme suit :

Problème : Model-Checking($*$)
Instance : B une base de croyances, φ une formule, m une interprétation
Question : $m \models B * \varphi$?

Observons que tout modèle de $B *_{\mathrm{RSRG}} \mu$ est un modèle de $B *_{\mathrm{G}} \mu$ et à l'inverse tout modèle de $B *_{\mathrm{wid}} \mu$ est un modèle de $B *_{\mathrm{RSRW}} \mu$.

Nous étudions successivement la complexité de ce problème selon la stratégie qui est utilisée.

4.1 Complexité pour les opérateurs $*_{\mathrm{G}}$,$*_{\mathrm{RSRG}}$ et $*_{\mathrm{PRSRG}}$

La complexité de ce problème a été étudiée par Liberatore et Schaerf dans [13] pour l'opérateur de Ginsberg.

Théorème 4.1 [13] Model-Checking*($*_{\mathrm{G}}$) est* coNP*-complet dans le cas général de la logique propositionnelle, et dans* P *dans le cas des formules de Horn.*

Ainsi, pour cet opérateur, la restriction à des formules de Horn rend le problème de la vérification de modèle traitable efficacement. Nous montrons dans le théorème suivant que quand le critère utilisé pour la maximalité des sous-bases cohérentes est celui de la cardinalité, la complexité dans le cas propositionnel reste inchangée. En revanche, avec ce critère la restriction aux formules de Horn ne rend pas le problème plus facile à traiter.

Théorème 4.2 Model-Checking*($*_{\mathrm{RSRG}}$) et* Model-Checking*($*_{\mathrm{PRSRG}}$) sont* coNP*-complets dans le cas général de la logique propositionnelle, aussi bien que dans le cas des formules de Horn.*

Preuve : Soit (B, μ, m) où B est une base de croyances stratifiée, une instance de Model-Checking($*_{\mathrm{PRSRG}}$). Si m n'est pas un modèle de μ, alors $m \not\models B *_{PRSRG} \mu$. Sinon, un seul sous-ensemble B' de B est candidat à être de trace maximale parmi tous les sous-ensembles de B cohérents avec μ ayant m comme modèle. Il s'agit de $B' = \{\alpha \in B \mid m \models \alpha\}$. Pour montrer que $m \not\models B *_{PRSRG} \mu$, il suffit de montrer que B' n'est pas de trace maximale. Pour cela il suffit de deviner un ensemble $B_0 \subseteq B$ et une interprétation m_0 tels que $m_0 \models \bigwedge(B_0 \cup \{\mu\})$ (et donc $B_0 \cup \{\mu\}$ est cohérent) et $trace(B', B) <_{lex} trace(B_0, B)$. Ces vérifications pouvant être faites en temps polynomial, cela prouve que Model-Checking($*_{\mathrm{PRSRG}}$) (et *a fortiori* Model-Checking($*_{\mathrm{RSRG}}$)) est dans coNP.

Montrons maintenant la coNP-difficulté de Model-Checking($*_{\mathrm{RSRG}}$) (et *a fortiori* celle de Model-Checking($*_{\mathrm{PRSRG}}$)) dans le cas des formules de Horn. Nous utilisons une réduction du problème Max-Independent-Set, défini ci-dessous et bien connu pour être NP-complet (voir par exemple [8]), au complémentaire de Model-Checking($*_{\mathrm{RSRG}}$).

Problème : MAX-INDEPENDENT-SET
Instance : $G = (V, E)$ un graphe non orienté, k un entier.
Question : Existe-t-il dans G un stable de taille supérieure ou égale à k, c'est-à-dire $V' \subseteq V$ avec $|V'| \geq k$, tel que pour tout couple de sommets $\{x, y\} \in V'^2$, $\{x, y\} \notin E$?

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et k un entier. A chaque sommet de G nous associons une variable propositionnelle de même nom, et nous considérons $U = \{u_1, ..., u_{k-1}\}$ un ensemble de $k-1$ nouvelles variables propositionnelles. Nous considérons alors B une base de croyances, μ une formule et m une interprétation définies comme suit :

— $B = \{(v_i) \mid v_i \in V\} \cup \{(u_j) \mid u_j \in U\}$
$\cup \{(\neg v_i \vee \neg v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in E\}$
$\cup \{(\neg v_i \vee \neg u_j) \mid v_i \in V, u_j \in U\}$
— $\mu = s$ et $m = U \cup \{s\}$ où s est une nouvelle variable n'apparaissant pas dans B.

Montrons que G admet un stable de taille supérieure ou égale à k si et seulement si $m \not\models B *_{RSRG} \mu$.

Observons que toute sous-base cohérente de B est cohérente avec μ, de plus il existe toujours une sous-base cohérente de B de cardinalité maximale qui contient toutes les clauses binaires. En effet s'il manque une clause $(\neg v_i \vee \neg w_j)$ dans B, par maximalité cela signifie que B contient à la fois v_i et w_j. Puisque toutes les clauses binaires sont négatives, l'ensemble $B' = B \cap \{(\neg v_i \vee \neg w_j)\} \setminus \{v_i\}$ est cohérent, de même cardinalité que B et contient une clause binaire de plus. Finalement un tel ensemble ne peut contenir à la fois une clause unaire issue de V et une issue de U.

Supposons que G admet un stable W de taille supérieure ou égale à k. L'ensemble $B' = \{(v_i) \mid v_i \in W\} \cup \{(\neg v_i \vee \neg v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in E\} \cup \{(\neg v_i \vee \neg u_j) \mid v_i \in V, u_j \in U\}$ est alors cohérent (satisfait par l'interprétation W). Puisque $|W| \geq k$, B' prouve que l'ensemble des clauses de B satisfaites par m n'est pas de cardinalité maximale, ce qui prouve que $m \not\models B *_{RSRG} \mu$.

Réciproquement, conformément aux observations faites ci-dessus, si G n'admet pas de stable de taille supérieure ou égale à k, alors l'ensemble $\{(u_j) \mid u_j \in U\} \cup \{(\neg v_i \vee \neg v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in E\} \cup \{(\neg v_i \vee \neg u_j) \mid v_i \in V, u_j \in U\}$ est de cardinalité maximale. Or cet ensemble est l'ensemble des clauses de B satisfaites par m , et donc $m \models B *_{RSRG} \mu$. ∎

4.2 Complexité pour les opérateurs $*_{\mathrm{wid}}$,$*_{\mathrm{RSRW}}$ et $*_{\mathrm{PRSRW}}$

Nous étudions maintenant la complexité des opérateurs qui utilisent une stratégie plus prudente, à savoir les opérateurs Widtio, RSRW et PRSRW. Dans le cas propositionnel, la vérification de modèle pour ces opérateurs se situe au deuxième niveau de la hiérarchie polynomiale.

Théorème 4.3 [13] MODEL-CHECKING$(*_{\mathrm{wid}})$ *est* Σ_2P-*complet dans le cas général de la logique propositionnelle.*

A notre connaissance seul ce résultat était connu jusqu'à présent, et en particulier la complexité exacte de ce problème dans le cas des formules de Horn était encore une question ouverte. Nous répondons à cette question en montrant que la restriction aux formules de Horn fait descendre le problème d'un niveau dans la hiérarchie polynomiale.

Théorème 4.4 MODEL-CHECKING$(*_{\mathrm{wid}})$ *est* NP-*complet dans le cas des formules de Horn.*

Preuve : Pour prouver que $m \models B *_{\mathrm{wid}} \mu$, il faut montrer que pour tout $\alpha \in B$ tel que $m \not\models \alpha$, il existe $B'_\alpha \subseteq B$ tel que $B'_\alpha \cup \{\mu\}$ est cohérent et $B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\}$ est incohérent (un tel ensemble peut être complété jusqu'à devenir maximal par inclusion).

Toutes les vérifications de cohérence sont exécutables en temps polynomial quand les formules sont de Horn. Il s'agit donc d'un problème dans NP.

Dans un second temps, nous établissons la NP-difficulté par réduction à partir du problème PQ-ABDUCTION défini comme suit et prouvé être NP-complet pour les formules de Horn par Creignou et Zanuttini dans [5] :

Problème : PQ-ABDUCTION
Instance : φ une formule de Horn, $A = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble de variables tel que $A \subseteq Var(\varphi)$, $q \in Var(\varphi) \setminus A$ une variable.
Question : Existe-t-il un ensemble $E \subseteq \mathrm{Lit}(A)$ tel que $\varphi \wedge \bigwedge E$ est satisfaisable et $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge \neg q$ est insatisfaisable ?

Soit (φ, A, q) une instance du problème PQ-ABDUCTION. Supposons sans perte de généralité que la formule de Horn $\varphi \wedge q$ est satisfaisable. Considérons B un ensemble de clauses, μ une formule et m une interprétation, définis de la façon suivante :

— $B = \{(\varphi \wedge l) \vee \neg x_0 \mid l \in \mathrm{Lit}(A)\} \cup \{\neg q \wedge x_0\}$.
— $\mu = x_0$.

— Choisissons pour m une interprétation telle $m \models \varphi \wedge x_0 \wedge q$.

Remarquons que puisque φ est une formule de Horn toutes les formules de B peuvent être écrites comme des formules de Horn.

Montrons qu'il existe $E \subseteq \mathrm{Lit}(A)$ tel que $\varphi \wedge \bigwedge E$ est satisfaisable et $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge \neg q$ est insatisfaisable si et seulement si $m \models B *_{\mathrm{wid}} \mu$, autrement dit, pour tout $\alpha \in B$ tel que $m \not\models \alpha$, il existe $B'_\alpha \subseteq B$ tel que $B' \cup \{\mu\}$ est cohérent et $B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\}$ est incohérent.

Dans un premier temps considérons un ensemble $E \subseteq \mathrm{Lit}(A)$ tel que $\varphi \wedge \bigwedge E$ est satisfaisable et $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge \neg q$ est insatisfaisable. Commençons par examiner les formules α de B dont m n'est pas un modèle. Il y a deux cas possibles :

— Si $\alpha = (\neg q \wedge x_0)$, prenons $B'_\alpha = \{(\varphi \wedge l) \vee \neg x_0 \mid l \in E\}$. On a alors $\bigwedge(B'_\alpha \cup \{\mu\}) \equiv ((\varphi \wedge \bigwedge E) \vee \neg x_0) \wedge x_0$. Cette formule est satisfaisable puisque x_0 n'apparaît ni dans φ ni dans E. En revanche, $\bigwedge(B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\}) \equiv \varphi \wedge \bigwedge E \wedge x_0 \wedge \neg q$ est insatisfaisable.

— Si $\alpha = ((\varphi \wedge l) \vee \neg x_0)$ pour un certain l. Si $m \not\models \alpha$, alors $m \not\models l$ puisque $m \models \varphi$. Prenons alors $B'_\alpha = \{(\varphi \wedge \neg l) \vee \neg x_0\}$. Puisque $m \models \varphi$ et $m \not\models l$ (et donc $m \models \neg l$), l'unique formule de B'_α est satisfaite par m, et donc $B'_\alpha \cup \{\mu\}$ est cohérent. D'autre part, $B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\} = \{(\varphi \wedge \neg l) \vee \neg x_0\} \cup \{x_0\} \cup \{(\varphi \wedge l) \vee \neg x_0\}$ est incohérent.

On a donc montré que s'il existe un ensemble $E \subseteq \mathrm{Lit}(A)$ tel que $\varphi \wedge \bigwedge E$ est satisfaisable et $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge \neg q$ est insatisfaisable, alors $m \models B *_{\mathrm{wid}} \mu$.

Réciproquement supposons que $m \models B *_{\mathrm{wid}} \mu$. Autrement dit, supposons que pour tout $\alpha \in B$ tel que $m \not\models \alpha$ il existe un sous ensemble $B'_\alpha \subseteq B$ tel que $B'_\alpha \cup \{\mu\}$ est cohérent et $B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\}$ est incohérent. Considérons $\alpha = \neg q \wedge x_0$ et prenons $E = \{l \mid ((\varphi \wedge l) \vee \neg x_0) \in B'_\alpha\}$. D'une part, observons que $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge x_0 \equiv \bigwedge(B'_\alpha \cup \{\mu\})$ et donc $\varphi \wedge \bigwedge E$ est satisfaisable. D'autre part, $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge x_0 \wedge \neg q \equiv \bigwedge(B'_\alpha \cup \{\mu\} \cup \{\alpha\})$ et donc $\varphi \wedge \bigwedge E \wedge \neg q$ est insatisfaisable.

Enfin, observons que la réduction est calculable en temps polynomial. Le seul point critique est de choisir m qui soit un modèle de φ. Or φ est une formule de Horn. Il est donc possible de trouver un modèle de φ en temps polynomial. On a donc finalement bien démontré que Model-Checking($*_{\mathrm{wid}}$) est NP-complet dans le cas des formules de Horn. ∎

Pour cette stratégie extrêmement prudente, contrairement à la stratégie précédente, considérer la cardinalité comme critère de maximalité rend le problème dans le cas propositionnel plus facile, puisqu'il se situe dans une sous-classe de Σ_2P. En effet, nous obtenons les résultats suivants pour les problèmes Model-Checking($*_{\mathrm{RSRW}}$) et Model-Checking($*_{\mathrm{PRSRW}}$).

Théorème 4.5 *Dans le cas général de la logique propositionnelle,*

— Model-Checking*($*_{\mathrm{RSRW}}$) est dans* Θ_2P *et est* coNP*-difficile,*

— Model-Checking*($*_{\mathrm{PRSRW}}$) est dans* Δ_2P *et est* coNP*-difficile.*

Preuve : Commençons par établir l'appartenance de Model-Checking($*_{RSRW}$) à la classe Θ_2P. Soit B une base de croyances et μ une formule. On note k_{max} la cardinalité maximale des sous-ensembles de B cohérents avec μ. Pour décider si m est un modèle de la base révisée $B *_{RSRW} \mu$, il faut vérifier que pour toutes les formules α de B, dont l'interprétation m n'est pas un modèle, il existe au moins un sous-ensemble B'_α de $B \setminus \{\alpha\}$ cohérent avec μ et de cardinalité égale à k_{max}. On peut donc utiliser l'algorithme suivant :

1. Vérifier que $m \models \mu$
   — sinon, on a $m \not\models B *_{RSRW} \mu$.
   — si oui, continuer.
2. Calculer k_{max}.
3. — Pour tout $\alpha \in B$ telle que $m \not\models \alpha$, existe-t-il un sous-ensemble $B'_\alpha \subseteq B \setminus \{\alpha\}$ tel que : $B'_\alpha \cup \{\mu\}$ est cohérent et $|B'_\alpha| = k_{max}$?
   — si oui, $m \models B *_{RSRW} \mu$,
   — sinon, $m \not\models B *_{RSRW} \mu$.

Le calcul de k_{max} se fait par une recherche dichotomique classique en posant des questions du type *"Existe-t-il un sous-ensemble de B cohérent avec μ et de taille supérieure ou égale à k ?"*, et donc se fait par un nombre logarithmique d'appels à un oracle NP.

La troisième étape est réalisée en considérant toutes les formules $\alpha \in B$ en parallèle, et donc requiert un seul appel à un oracle NP (il suffit de deviner au plus $|B|$ couples (B'_α, m_α) où B'_α est un sous-ensemble de $B \setminus \{\alpha\}$ avec $|B'_\alpha| = k_{max}$, et m_α est une interprétation telle que $m_\alpha \models \bigwedge(B'_\alpha \cup \{\mu\})$).

Au total nous obtenons un algorithme polynomial qui utilise un nombre logarithmique d'appels à un oracle NP, ce qui prouve bien que le problème Model-Checking($*_{RSRW}$) est dans Θ_2P.

Pour le problème Model-Checking($*_{\mathrm{PRSRW}}$), l'algorithme est similaire en considérant la trace au lieu de la cardinalité. Le calcul de la trace des sous-bases cohérentes maximale dans l'ordre lexicographique se fait en calculant successivement (et non en parallèle) les composantes de cette trace strate par strate, par des appels adaptatifs à un oracle NP. De ce fait le nombre d'appels à l'oracle NP dépend du nombre de strates de la base de croyances, l'algorithme prouve alors l'appartenance du problème à la classe Δ_2P.

Pour les bornes inférieures il suffit de montrer que MODEL-CHECKING($*_{\text{RSRW}}$) est coNP-difficile. Nous utilisons une réduction à partir du problème de l'insatisfaisabilité des formules propositionnelles. Etant donné une formule φ, considérons la base $B = \{\varphi \wedge r\}$, la formule $\mu = s$ et l'interprétation $m = \{s\}$ où r et s sont de nouvelles variables n'apparaissant pas dans φ. Il est clair que $B *_{RSRW} \mu = \varphi \wedge r \wedge s$ ou $B *_{RSRW} \mu = s$ selon que φ est satisfaisable ou non. Ainsi φ est insatisfaisable si et seulement si $m \models B *_{RSRW} \mu$. Cela prouve la coNP-difficulté de MODEL-CHECKING($*_{\text{RSRW}}$). ▌

Il est à noter que les bornes inférieure et supérieure de complexité obtenues pour MODEL-CHECKING($*_{\text{RSRW}}$) et MODEL-CHECKING($*_{\text{PRSRW}}$) ne coïncident pas et donc que la complexité exacte de ces problèmes reste ouverte. La complexité de ces problèmes quand ils sont restreints à des formules de Horn est elle aussi ouverte.

Le tableau suivant récapitule les résultats de complexité obtenus :

Op.	**Log. prop.**	**Horn**
Ginsberg	coNP-complet [13, Th. 1]	P [13, Th. 17]
Widtio	Σ_2P-complet [13, Th. 2]	NP-complet, Th. 4.4
RSRG	coNP-complet, Th. 4.2	coNP-complet, Th. 4.2
RSRW	dans Θ_2P, coNP-difficile, Th. 4.5	dans Θ_2P, Th. 4.5
PRSRG	coNP-complet, Th. 4.2	coNP-complet, Th. 4.2
PRSRW	dans Δ_2P, coNP-difficile, Th. 4.5	dans Δ_2P, Th. 4.5

5 Travaux connexes

Il est bien connu que la révision de bases de croyances et l'inférence non-monotone à partir d'une base de croyances incohérente sont les deux faces d'une même pièce [7]. En cas d'incohérence en présence d'une nouvelle information, deux attitudes sont possibles : soit réviser la base de croyances, soit définir une relation d'inférence non-monotone tolérant l'incohérence. Dans [4] Cayrol, Lagasquie-Schiex et T. Schiex présentent une étude comparative de certaines relations d'inférence syntaxique. Soit B une base de croyances, $<$ un pré-ordre total sur les formules de la base, et ϕ une formule propositionnelle, les relations d'inférence sont définies de façon synthétique par $(B, <) \mid\!\sim^{p,m} \phi$ où $p \in \{T, INCL, LEX\}$ représente le mécanisme de sélection de sous bases maximales cohérentes, de sous-bases maximales cohérentes préférées pour l'inclusion ensembliste ou de sous-bases maximales cohérentes préférées pour l'ordre lexicographique respectivement et $m \in \{\forall, \exists, ARG\}$ représente la stratégie d'inférence, universelle, existentielle ou argumentative respectivement. L'étude comparative du point de vue de la complexité est présentée dans le cas propositionnel et le cas de Horn, cependant elle porte sur le probléme d'inférence et non sur le probléme de vérification de modéle. Par ailleurs, la stratégie d'intersection de sous-bases maximales cohérentes n'est pas envisagée.

6 Conclusion

Lorsque l'on s'intéresse aux opérateurs de révision de bases de croyances syntaxiques, on peut jouer sur deux paramètres, le critère de maximalité des sous-bases cohérentes et la stratégie pour exploiter les sous-bases cohérentes maximales. Lorsque le critère de maximalité est la cardinalité, nous avons rappelé la définition de l'opérateur RSRG et nous avons défini un nouvel opérateur RSRW dont la stratégie repose sur l'intersection des sous-bases cohérentes maximales, puis nous les avons généralisés au cas de bases de croyances stratifiées avec les opérateurs PRSRG et PRSRW. Ces opérateurs sont les analogues des opérateurs de Ginsberg et Widtio qui utilisent l'inclusion ensembliste comme critère de maximalité.

D'une part nous avons d'abord établi la complexité du problème de vérification de modèle pour l'opérateur Widtio dans le cas du fragment de Horn, répondant ainsi à une question laissée ouverte par Liberatore et Schaerf [13].

D'autre part nous avons étudié dans quelle mesure l'utilisation de la cardinalité comme critère de maximalité de sous-bases maximales cohérentes (au lieu de l'inclusion ensembliste) avait une influence sur la complexité du problème de vérification de modèle. Lorsque la stratégie considère toutes les sous-bases cohérentes aussi plausibles les unes que les autres, l'utilisation de la cardinalité comme critère de maximalité n'a pas d'influence sur la complexité du problème de vérification de modèle dans le cas propositionnel. Cependant, ce critère fait que la restriction aux formules de Horn ne rend pas le problème plus facile à traiter. En revanche, lorsque la stratégie repose sur l'intersection des sous-bases cohérentes maximales la complexité du problème de vérification de modèle diminue.

Il semble alors assez naturel de s'interroger sur l'impact de la cardinalité comme critère de maximalité pour d'autres stratégies de révision de bases de croyances, ce qui fera l'objet de futurs travaux.

Références

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *J. of Symb. Log.*, 50 :510–530, 1985.

[2] S. Benferhat, J. Ben-Naim, O. Papini, and E. Würbel. An answer set programming encoding of prioritized removed sets revision : application to GIS. *Appl. Intell.*, 32(1) :60–87, 2010.

[3] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proc. of IJCAI'93*, pages 640–645, 1993.

[4] C. Cayrol, M.-C. Lagasquie-Schiex, and T. Schiex. Nonmonotonic reasoning : From complexity to algorithms. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 22(3-4) :207–236, 1998.

[5] N. Creignou and B. Zanuttini. A Complete Classification of the Complexity of Propositional Abduction. *SIAM J. Comput.*, 36 :207–229, 2006.

[6] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artif. Intell.*, 57(2-3) :227–270, 1992.

[7] P. Gärdenfors. Belief revision and nonmonotonic logic : Two sides of the same coin ? In *Proc. of ECAI'90*, pages 768–773, 1990.

[8] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.

[9] M.L. Ginsberg. Counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 30 :35–79, 1986.

[10] S. O. Hansson. Revision of belief sets and belief bases. In *Handb. of Defeas. Reas. and Uncert. Manag. Syst.*, volume 3, pages 17–75. Kluwer, 1998.

[11] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artif. Intell.*, 52 :263–294, 1991.

[12] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proc. of IJCAI'95*, pages 1534–1540, 1995.

[13] P. Liberatore and M. Schaerf. Belief revision and update : Complexity of model checking. *J. Comput. Syst. Sci.*, 62(1) :43–72, 2001.

[14] B. Nebel. Belief revision and default reasoning : Syntax-based approaches. In *Proc. of KR'91*, pages 417–428, 1991.

[15] B. Nebel. How hard is it to revise a belief base ? In *Belief Change*, volume 3 of *Handb. of Defeas. Reas. and Uncert. Manag. Syst.*, pages 77–145. Springer Netherlands, 1998.

[16] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison Wesley, 1994.

[17] O. Papini. A complete revision function in propositionnal calculus. In *Proc. of ECAI'92*, pages 339–343, 1992.

[18] L. J. Stockmeyer. The polynomial-time hierarchy. *Theor. Comput. Sci.*, 3(1) :1–22, 1976.

[19] K. Wagner. More complicated questions about maxima and minima, and some closures of NP. *Theor. Comput. Sci.*, 51(1-2) :53–80, 1987.

[20] M. Winslett. Sometimes updates are circumscription. In *Proc. of IJCAI'89*, pages 859–863, 1989.